علاقة فضاء الجداء الداخلي مع مفهوم الفضاء المنظم

__مبرهنة:__ ليكن فضاء جداء داخلي ولتكن الدالة الحقيقية $\|\cdot\|$ المعرفة بالشكل

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

عندئذ تحدد هذه الدالة نظيماً على X وتحقق هذا النظيم المتراجحة التالية:

$$\star \; |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$ متراجحة كوشي شفارتز

(لنبرهن على متراجحة شفارتز)

(1) $\boxed{x = 0_x}$ عندئذ

الطرف الأول $h_1 = \langle x, y\rangle = \langle 0_x, y\rangle$

$= \langle 0_{\mathbb{R}} \cdot 0_x, y\rangle = 0_{\mathbb{R}} \langle 0_x, y\rangle = 0_{\mathbb{R}}$

الطرف الثاني $h_2 = \|x\| = \|0_x\| = \|0_{\mathbb{R}} \cdot 0_x\| = 0_{\mathbb{R}}$

(2) $\boxed{x \neq 0_x}$ لنأخذ $y - \alpha x$

$$\|y - \alpha\|^2 \geq 0$$

$$0 \leq \|y - \alpha x\|^2 = \langle y - \alpha x, y - \alpha x\rangle$$

$$0 \leq \langle y, y\rangle + \langle -\alpha x, y\rangle + \langle y, -\alpha x\rangle + \langle -\alpha x, -\alpha x\rangle$$

$$0 \leq \|y\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle x, x\rangle$$

$$0 \leq \|y\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2 \|x\|^2$$

$$\boxed{\text{لتكن ،} \quad \alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}}$$

$$0 \leq \|y\|^2 - \frac{2\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle^2}\|x\|^2$$

$$0 \leq \|y\|^2 - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2}$$

$$0 \leq \|y\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2}$$

$$0 \leq \|y\|^2\, \|x\|^2 - \langle x, y\rangle^2$$

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\, \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

شروط النظيم: كل جداء داخلي هو فضاء نظيم

1) $\forall\, x \in X\ ,\ \langle x, x\rangle \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$

2) $\forall\, x \in X\ ,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0$
$\Leftrightarrow x = 0_x$

3) $\forall\, x \in X\ ,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ ;\ \|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle}$
$= |\alpha| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\, \|x\|$

4) $\forall\, x, y \in X\ ;\ \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$\|x+y\|^2 = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \underset{\text{حسب كوشي شوارتز}}{\overset{*}{\leq}} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq \left[\|x\| + \|y\|\right]^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

نتيجة: الشرط اللازم والكافي كي تتحقق المتراجحة (كوشي) بالمساواة هو أن يكون
y ، x مرتبطان خطياً أي $\exists$ $\lambda = 0$

تدل البرهنة السابقة على أنه يمكن أن نولد من جداء داخلي نظيم ومنه
فإن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء نظيم ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة
أي ليس كل فضاء نظيم هو فضاء جداء داخلي إلا إذا تحققت المساواة
التالية:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left[\|x\|^2+\|y\|^2\right]$$ مساواة متوازي الأضلاع

$$L_1=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle$$

$$=\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle$$

$$L_1=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle$$
$$=2\|x\|^2+2\|y\|^2=L_2$$

مثال: ليكن $X=\mathbb{R}^2$ فضاء متجهي

نعرف الدالة: $\|x\|=|x_1|+|x_2|$

حيث $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

برهن أن هذه الدالة تحدد نظيماً على $\mathbb{R}^2$ وهذا النظيم غير مولد من جداء داخلي

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

هل مساواة متوازي الاضلاع محققة؟

$$x=(1,1)\quad,\quad y=(1,-1)$$

$$x+y=(2,0)\quad,\quad x-y=(0,2)$$

$$\|x+y\|=|2|+|0|=2\Rightarrow\|x+y\|^2=4$$
$$\|x-y\|=|0|+|2|=2\Rightarrow\|x-y\|^2=4$$

$$\|x\|=|1|+|1|=2\Rightarrow\|x\|^2=4$$
$$\|y\|=|1|+|-1|=2\Rightarrow\|y\|^2=4$$

$$L_1=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8$$
$$L_2=2\left[\|x\|^2+\|y\|^2\right]=2(8)=16$$

التاريخ: / / ٢٠

الموضوع:

المساواة غير محققة $\Leftarrow L_1 \neq L_2$ وبالتالي فإن النهاية غير موجودة في هذه الحالة

الفضاء المتري

لتكن X مجموعة ما ولنأخذ الجداء الديكارتي $X \times X$ ولنعرف على هذا الجداء الدالة d كالتالي:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

ندعو d بدالة مسافة والفضاء (X,d) بالفضاء المتري إذا تحققت الشروط التالية

1) $\forall x,y \in X \; ; \; d(x,y) \geq 0$

2) $\forall x,y \in X \; , \; d(x,y) = d(y,x)$

3) $\forall x,y \in X \; , \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

4) $\forall x,y,z \in X \; , \; d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

متراجحة المثلث

مثال: نعرف على الفضاء $\mathbb{R}^n$ الدالة

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, برهن أن $(\mathbb{R}^n, d)$ فضاء متري

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$

1) $|x_i - y_i| \geq 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(y,x)$

3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = 0$

$\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$

$\rightarrow x_i = y_i \quad i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x = y$

4) $d(x, z) \overset{?}{\leq} d(x, y) + d(y, z)$

$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$

$\Rightarrow |x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} [|x_i - y_i| + |y_i - z_i|]$

الفضاء المتري شرط على مجموعة وعلى المسافة المترية

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$

ملاحظة: من الممكن أن نعرف دالة مسافة على فضاء متجهي لا يشترط أن (X, d) هو فضاء متري

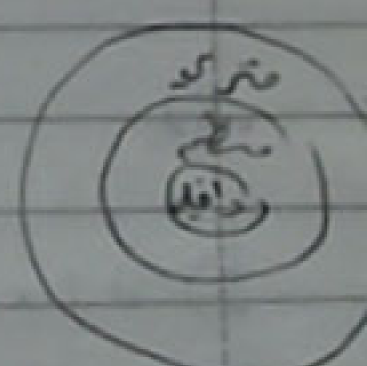
وإذا X مجموعة ما فإن (X, d) فضاء متري

ملاحظة: كل فضاء معياري X يحدد متريكاً (مسافة) d معرف بالمسافة التالية

$d(x, y) = \|x - y\|$

ويسمى d متريكاً مولداً من نظيم وكل فضاء منظم هو فضاء متري

مبرهنة: إذا كان d متريكاً مولداً من نظيم على فضاء متجهي X فإن



$d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (1

$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ (2

$\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

البرهان:

1): $d(x + z, y + z) = \|x + z - y - z\| = \|x - y\|$

$= d(x, y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha (x-y)\| = |\alpha| \, \|x-y\|$
$= |\alpha| \, d(x,y)$

يترتب على هذه الملاحظة: بأنه إذا لم تحقق المتري d إحدى المساواتين فلا يمكن أن تكون مولدة من نظيم، أي ليس كل فضاء متري هو فضاء منظم

مثال 1: ليكن (X, d) فضاء متري مولد من نظيم ولنعرف الفضاء المتري على X التالي:

$$\tilde{d}_1(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 + d(x,y) & x \neq y \end{cases}$$

برهن أن $\tilde{d}$ فضاء متري غير مولد من نظيم

مثال 2: ليكن S مجموعة كل المتتاليات المحدودة وغير المحدودة ونعرف الدالة:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

$$y = \{y_i\} \quad , \quad x = \{x_i\}$$

اثبت أن d متري على S، وهذا المتري غير مولد من نظيم

$$0 < \alpha < \beta$$
$$\alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta$$
$$\alpha(1+\beta) < \beta(1+\alpha)$$
$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$$