المحاضرة الثالثة..

2015/3/17

المصفوفات:

تعرف المصفوفة الحقيقية $A = (a_{jk})$ التي عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n مؤثراً خطياً:

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

$$x \longrightarrow y = Tx = Ax$$

حيث $x = (\xi_i)$ متجه من $\mathbb{R}^n$ و $y = (\eta_i)$ متجه من $\mathbb{R}^r$

ويمكننا كتابة المساواة $y = Ax$ بالشكل:

y صورة العنصر x وفق المصفوفة A

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

عملية ضرب المصفوفات خطية فإن T مؤثر خطي.

$$A(\alpha x) = \alpha A(x)$$ «الخطية»

• هل لكل مؤثر خطي مصفوفة، وإذا كان له مصفوفة فما وحدانية هذه المصفوفة؟

مبرهنة (المدى والفضاء الصفري):

إذا كان T مؤثراً خطياً، فإننا نجد ما يلي:

أ- المدى $R(T)$ هو فضاء متجهي.

ب- إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ فإن $\dim R(T) \leq n$

جـ- الفضاء الصفري $N(T)$ هو فضاء متجهي.

في المؤثرات الخطية فإن $R(T)$ يكون فضاء متجهي

أما في المؤثرات بشكل عام ليس من الضروري

أن يكون $R(T)$ فضاء متجهي إنما يقع في فضاء متجهي

البرهان:

أ- نأخذ أي عنصرين من المدى $R(T)$ هما y_2, y_1 وبسبب الخاصة التابعية فإنه يوجد عنصرين x_2, x_1 من المنطلق x_1, x_2 بحيث يكون $Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2$

أياً كان العددان α, β فإن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$ لأن $D(T)$ فضاء متجهي وبما أن T خطي يكون:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

ومنه فإن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ وبما أن y_1, y_2 كيفيان و β, α كذلك فإن $R(T)$ يكون فضاء متجهي.

ب- ليكن $\dim D(T) = n < \infty$ ولنبرهن أن $\dim R(T) \leq n$

لنختر المتجهات $y_1, \dots, y_{n+1}$ من $R(T)$ التي عددها $n+1$ بصورة كيفية.

عندئذٍ بسبب الخاصة التابعية توجد عناصر $x_1, \dots, x_{n+1}$ في $D(T)$ بحيث أن $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ وبما أن $\dim D(T) = n$ فإن المجموعة $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ تكون مرتبطة خطياً وبالتالي فإن: $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$

حيث $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ أعداد واحد منها على الأقل لا يساوي الصفر وبما أن T خطي فإن $T0 = 0$ وبالتالي نجد أن:

$$T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0$$

وهذا يبين أن $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ مجموعة مرتبطة خطياً لأن الأعداد α_i ليست جميعها مساوية للصفر وبما أن هذه المجموعة الجزئية من $R(T)$ مأخوذة بصورة كيفية فإننا نستنتج أن $R(T)$ لا يحوي مجموعة جزئية مستقلة خطياً مؤلفة من $n+1$ أو أكثر من العناصر وهذا يعني أن $\dim R(T) \leq n$.

$N(T)$ غير خالية. ليكن $x_1, x_2 \in N(T)$ عندئذٍ يكون $Tx_2 = 0$ ، $Tx_1 = 0$ وبما أنّ T

فهو يحوي الصفر مؤثر خطي فإنّ:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0$$

من أجل كل

وذلك أياً كان العددان α , β وهذا يبين أنّ $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$

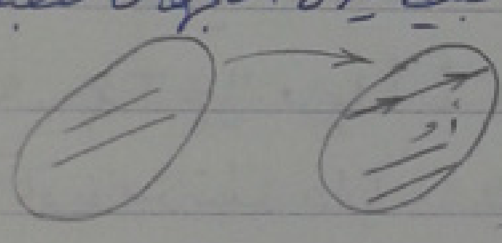
وبالتالي فإنّ $N(T)$ فضاء متجهي.

نتيجة: (من الفقرة ب من البرهان)

إنّ المؤثرات الخطية تحفظ الارتباط الخطي.

أي إذا أخذنا جملة مرتبطة خطياً من المنطلق فإنّ صورتها ستكون مرتبطة خطياً.

- مثال: صورة المتجهان المتوازيان في $\mathbb{R}^2$ وفق مؤثر خطي ستكون إمّا متجهين متوازيين أو متجه واحد بحيث يكون المتجهان منطبقان.



صورة الشعاعين المتوازيين (المرتبطين خطياً) في المنطلق هي شعاعين متوازيين

أو منطبقين في شعاع واحد.

- أي جملة تحوي الصفر تكون مرتبطة خطياً لأنّ الصفر مرتبط خطياً مع أي شعاع. الجملة المرتبطة خطياً إذا حوت الصفر فإنّ صورة هذه الجملة مرتبطة خطياً.

عكس مؤثر خطي:

إذا كان المؤثر تقابلي (غامر ومتباين) فله مؤثر عكسي.

المؤثر هو حكماً غامر ويتحقق التباين إذا كان:

$$Tx_1 = Tx_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

إذا كان متباين فله مؤثر عكسي نرمز له بـ T^{-1} منطلقه هو $R(T)$ ومستقره هو $D(T)$.

T^{-1} مؤثر لأن منطلقه هو $R(T)$ فضاء متجهي والمستقر فضاء متجهي

$$T^{-1} : R(T) \longrightarrow D(T)$$

$$y_0 \longrightarrow x_0 \qquad (y_0 = Tx_0)$$

• إذا كان T خطي فهل T^{-1} خطي ؟

أي نريد أن نثبت أنه إذا كان $T : D(T) \longrightarrow R(T)$ مؤثر خطي وكان متباين

فإن : $T^{-1} : R(T) \longrightarrow D(T)$ خطي .

الإثبات :

إذا أخذنا y من $R(T)$ و α من الحقل فهل $T^{-1}(\alpha y) = \alpha T^{-1}(y)$

بما أن $y \in R(T)$ فإنه يوجد $x \in D(T)$ بحيث $x = T^{-1}(y)$

$$T^{-1}(\alpha y) = T^{-1}(\alpha T(x))$$

$$= T^{-1}(T(\alpha x)) = \alpha x = \alpha T^{-1}(y)$$

حيث $T^{-1}T = I$.

إذاً ليس عكس كل مؤثر خطي هو مؤثر خطي إلا إذا كان المؤثر الخطي متباين .

انتهت المحاضرة ..