/ /

نمذجة رياضية

المحاضرة الثانية

١٦/٣/٢٠١٥م

مثال : (تمرين على النموذج السابق) وظيفة لم تحله الدكتورة

لكي يتم إنتاج ثلاثة منتجات مختلفة A_3, A_2, A_1 في شركة ما يجب أن تمر عبر ثلاثة أقسام إنتاجية.

فإذا علمت أن زمن إنتاج الوحدة الواحدة من المنتجات المختلفة بالساعات في كل من الأقسام الثلاثة، وكذلك الوقت الكلي المتاح لكل قسم مبينة حسب الجدول المرفق :

القسم الإنتاجي	الزمن اللازم بالساعات لإنتاج الوحدة الواحدة حسب القسم			الوقت الكلي
	A_3	A_2	A_1	
القسم الأول	3	1	2	120
القسم الثاني	0	2	1	60
القسم الثالث	1	0	2	40

المطلوب : إيجاد الخطة الإنتاجية المثلى لهذه الشركة حسب الوقت المتاح لكل قسم بحيث تحقق أكبر ربح ممكن.

علماً أن الربح العائد من إنتاج كل وحدة من A_3, A_2, A_1 هو $10, 20, 12$ وحدة نقدية على الترتيب.

ملاحظة:

إن النموذج الرياضي في مسألة استثمار الوقت هذه لا يختلف أبداً عن نموذج استثمار المواد الأولية السابقة على الرغم من اختلاف الفكرة الواقعية

فطالما أننا نريد استثمار شيء متوفر لدينا بحيث لا يمكننا تجاوزه ونريد معرفة كميات الإنتاج المثلى لتحقيق أكبر ربح ممكن ، فالفكرة الرياضية التجريدية تبقى نفسها أياً كان الشيء الذي نقوم باستثماره .

الحل:

لنفرض x_1 الكمية المنتجة من النوع $A_1 \Leftarrow$ الربح العائد من A_1 هو $10x_1$

x_2 الكمية المنتجة من النوع $A_2 \Leftarrow$ الربح العائد من A_2 هو $20x_2$

x_3 الكمية المنتجة من النوع $A_3 \Leftarrow$ الربح العائد من A_3 هو $12x_3$

وبالتالي ربح الشركة الكلي :

$$Z = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3$$

شرط ساعات عمل القسم الأول : $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 120$

شرط ساعات عمل القسم الثاني : $x_1 + 2x_2 \leq 60$

شرط ساعات عمل القسم الثالث : $2x_1 + x_3 \leq 40$

شروط عدم السلبية : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

وبالتالي النموذج الرياضي : أوجد القيمة العظمى للتابع :

$$Z = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 120$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + x_3 \leq 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

/ /

2 نموذج الخطة المثالية للقطاع:

لنفرض أن القطاع مؤلف من n مؤسسة تنتج كل منها m منتج
إذا كانت كميات الإنتاج محددة حسب الأنواع على الشكل التالي:

$A_1 , A_2 , \ldots\ldots , A_m$

وكانت طاقة تلك المؤسسات من القوى العاملة (ساعة عمل) هي:

$T_1 , T_2 , \ldots\ldots , T_n$

وكانت المصفوفة: $t = [t_{ij}] \quad ; \quad i = \overline{1,m} \ , \ j = \overline{1,n}$

هي مصفوفة للمعاملات الفنية لنفقات العمل (أي الزمن اللازم لإنتاج وحدة واحدة من المنتج i في المؤسسة j)، المطلوب:
وضع نموذج رياضي بحيث تكون تكلفة الإنتاج أصغر ما يمكن علماً أن تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج i في المؤسسة j هي C_{ij}

تشكيل النموذج الرياضي:

- لنفرض x_{ij} الكمية المنتجة من المنتج i في المؤسسة j.

ملاحظة:
من الضروري جداً التمييز بين النماذج التي تأخذ متغيراتها دليلاً واحداً (مثل النموذج الأول) والنماذج التي تأخذ متغيراتها دليلين (مثل النموذج الثاني).
وإن الخطأ بأمر كهذا في الفحص يلغي علامة السؤال كله.

- كميات الإنتاج للمنتج الأول في القطاع يجب أن تكون مساوية لـ A_1
إذا كانت أصغر من A_1 فسيصبح لدينا عجز في هذا المنتج، ولا نريدها أن تكون أكبر
أي يصبح الشرط: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots\ldots + x_{1n} = A_1$

وبالمثل من أجل بقية المنتجات تتشكل لدينا الشروط:

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots\ldots + x_{in} = A_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

- شروط ساعات العمل :

الزمن اللازم لإنتاج المنتج 1 في المؤسسة الأولى : $t_{11}\, x_{11}$

وبالمثل نجد الزمن اللازم لإنتاج المنتج i في المؤسسة الأولى : $t_{i1}\, x_{i1}$

وهكذا يكون شرط ساعات العمل في المؤسسة الأولى :

$$t_{11} x_{11} + t_{21} x_{21} + \cdots + t_{m1} x_{m1} \leq T_1$$

وبنفس الطريقة نجد شروط ساعات العمل في المؤسسة j :

$$t_{1j} x_{1j} + t_{2j} x_{2j} + \cdots + t_{mj} x_{mj} \leq T_j \;;\; j=\overline{1,n}$$

- بناء تابع الهدف : تكلفة الإنتاج أصغر ما يمكن .

تكلفة المنتج 1 في القطاع كله : $\sum_{j=1}^{n} c_{1j}\, x_{1j}$

تكلفة المنتج 2 في القطاع كله : $\sum_{j=1}^{n} c_{2j}\, x_{2j}$

⋮

تكلفة المنتج m في القطاع كله : $\sum_{j=1}^{n} c_{mj}\, x_{mj}$

مجموع كل هذه التكاليف هي التكلفة الكلية في القطاع أي تابع الكلفة :

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

* وبالتالي فالنموذج الرياضي للمسألة هو : أوجد القيمة الصغرى للتابع :

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \longrightarrow \min$$

ضمن الشروط :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} = A_1$$

$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} = A_m$$

$$t_{11} x_{11} + t_{21} x_{21} + \cdots + t_{m1} x_{m1} \leq T_1$$

$$\vdots$$

$$t_{1n} x_{1n} + t_{2n} x_{2n} + \cdots + t_{mn} x_{mn} \leq T_n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i=\overline{1,m} \quad , j=\overline{1,n}$$

3 نموذج الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية:

لنفرض أنه لدينا n منطقة زراعية مساحة كل منها $a_1, a_2, \dots, a_n$

نريد زراعتها بـ m نوعاً من المحاصيل الزراعية، ولتأمين متطلبات المجتمع منها يلزمنا من المحصول i المقدار b_i.

إذا كان متوسط إنتاج واحدة المساحة في السهل j من المحصول i يساوي a_{ij} طن في الهكتار.

وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول i يساوي c_i.

المطلوب: تحديد مقدار المساحة اللازم زراعتها بكل من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن لها مع تلبية حاجات المجتمع من كل محصول.

تشكيل النموذج الرياضي:

نفرض x_{ij} هو المساحة المزروعة من المنطقة j بالمحصول i حيث:

$i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

عندئذٍ يكون لدينا الجدول التالي:

المحاصيل \ المناطق	1	2	------	n	مقدار الطلب	مقدار الربح
1	a_{11} x_{11}	a_{12} x_{12}	------	a_{1n} x_{1n}	b_1	C_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	a_{m1} x_{m1}	a_{m2} x_{m2}	------	a_{mn} x_{mn}	b_m	C_m
مساحة المنطقة	a_1	a_2	------	a_n		

/ /

- تشكيل تابع الربح:

الكمية المنقولة من المعمل الأول في كل المناطق:

$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\cdots+a_{1n}x_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_{1j}$$

وبالتالي الربح من المعمل الأول: $c_1\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_{1j}$

والربح من المعمل الثاني: $c_2\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_{2j}$

⋮

الربح من المعمل m: $c_m\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_{mj}$

فيكون تابع الربح بالشكل:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_i a_{ij}x_{ij}$$

- شروط المساحة: (نريد استغلال كل المساحات المتوفرة)

للأرض الأولى: $x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=a_1$

⋮

للأرض n: $x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=a_n$

- شروط الطلب: (يجب تحقيق مقدار الطلب على الأقل)

للمعمل الأول: $a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\cdots+a_{1n}x_{1n}\geq b_1$

⋮

للمعمل m: $a_{m1}x_{m1}+a_{m2}x_{m2}+\cdots+a_{mn}x_{mn}\geq b_m$

- شروط عدم السلبية:

$$x_{ij}\geq 0 \quad ; \quad i=\overline{1,m} \quad , \quad j=\overline{1,n}$$

* وبالتالي النموذج الرياضي هو:

أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i \, a_{ij} \, x_{ij}$$

ضمن الشروط:

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = a_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = a_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = a_n$$
$$a_{11} x_{11} + a_{12} x_{12} + \cdots + a_{1n} x_{1n} \geqslant b_1$$
$$a_{21} x_{21} + a_{22} x_{22} + \cdots + a_{2n} x_{2n} \geqslant b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_{m1} + a_{m2} x_{m2} + \cdots + a_{mn} x_{mn} \geqslant b_m$$
$$x_{ij} \geqslant 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

مثال:

نريد استغلال أربعة مناطق زراعية هي الساحل، والغاب، وحلب، وحوران مساحة كل منها 10 , 15 , 100 , 50 .

وذلك بزراعتها بالمحاصيل التالية: قمح، وشعير، وقطن، وتبغ، وشوندر والتي نحتاج منها إلى ما يلي:

700 , 100 , 500 , 1500 , 2000

لنفرض أن إنتاجية المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطاة بالجدول المرفق، فاكتب النموذج الرياضي بحيث تكون قيمة الإنتاج أكبر ما يمكن.

(وظيفة لم تحله الدكتورة)

/ /

	الساحل	الغاب	حلب	حوران	الطلب	سعر الطن
قمح	5 x_{11}	4 x_{12}	6 x_{13}	6 x_{14}	2000	1500
شعير	6 x_{21}	5 x_{22}	4 x_{23}	6 x_{24}	1500	1000
قطن	4 x_{31}	10 x_{32}	8 x_{33}	5 x_{34}	500	5000
تبغ	7 x_{41}	2 x_{42}	0 x_{43}	0 x_{44}	100	4500
شوندر	3 x_{51}	12 x_{52}	10 x_{53}	4 x_{54}	700	500
	10	15	100	50		

الحل: نفرض x_{ij} المساحة المزروعة من المنتج i في المنطقة j

حيث $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,4}$

الكمية المنتجة من القمح : $5x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14}$

الكمية المنتجة من الشعير : $6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24}$

الكمية المنتجة من القطن : $4x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}$

الكمية المنتجة من التبغ : $7x_{41} + 2x_{42}$

الكمية المنتجة من الشوندر : $3x_{51} + 12x_{52} + 10x_{53} + 4x_{54}$

عندئذٍ يكون تابع الربح :

$$Z = 1500[5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+6x_{14}] + 1000[6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24}] +$$
$$+ 5000[4x_{31}+10x_{32}+8x_{33}+5x_{34}] + 4500[7x_{41}+2x_{42}] +$$
$$+ 500[3x_{51}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54}]$$

/ /

- شروط الطلبات : $5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+6x_{14} \geq 2000$

$\vdots$

$3x_{51}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54} \geq 700$

- شروط الساعات : $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=10$

$\vdots$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=50$

- شروط عدم السلبية : $x_{ij} \geq 0 \;;\; i=\overline{1,5} \;,\; j=\overline{1,4}$

* وبالتالي النموذج الرياضي هو : أوجد القيمة العظمى للتابع :

$$Z=1500[5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+6x_{14}]+1000[6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24}]+$$
$$+5000[4x_{31}+10x_{32}+8x_{33}+5x_{34}]+4500[7x_{41}+2x_{42}]+$$
$$+500[3x_{51}+12x_{52}+10x_{52}+4x_{54}] \longrightarrow Max$$

وذلك ضمن الشروط :

$$5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+6x_{14} \geq 2000$$
$$6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24} \geq 1500$$
$$4x_{31}+10x_{32}+8x_{33}+5x_{34} \geq 500$$
$$7x_{41}+2x_{42} \geq 100$$
$$3x_{51}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54} \geq 700$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=10$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=15$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=100$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=50$$
$$x_{ij} \geq 0 \;;\; i=\overline{1,5} \;,\; j=\overline{1,4}$$

انتهت المحاضرة الثانية