9/3/2015   المحاضرة الأولى :.

بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

أ- بعض التوزيعات الاحتمالية المنقطعة (أو المنفصلة)

$\boxed{1}$ توزيع برنولي: نسمي كل تجربة لها نتيجتين تجربة برنولية (ثنائية)، ونسمي إحدى النتيجتين نجاحاً والأخرى فشلاً ونرمز لاحتمال النجاح (p) ولاحتمال الفشل (q) حيث $q = 1 - p$. ونهتم لعدد النجاحات التي نحصل عليها خلال المحاولات التي عددها $\boxed{n}$ ونرمز لعدد النجاحات بالمتغير العشوائي X.

مثال تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة هي تجربة برنولية حيث لها نتيجتين إما الصورة (نجاح) أو الكتابة (فشل) ووسيط هذه التجربة هو $\boxed{p = 1/2}$.

* إلقاء حجري نرد، وحسبنا نتيجة التجربة نجاحاً إذا كان مجموع الوجهين $\boxed{4}$ وفشلاً خلاف ذلك فنكون أمام تجربة برنولية وسيطها $p = 3/36$ حيث يكون مجموع الوجهين $\boxed{4}$ عندما $\{(2,2),(1,3),(3,1)\}$

• تعريف: نقول عن متغير عشوائي X إن له توزيعاً برنولياً وسيطه p إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x) = p^x \cdot q^{1-x} \quad ; \; x \in \{0,1\}$$

$$0 < p < 1$$

$$q = 1 - p$$

(أي له جدول التوزيع)

X	0	1
$f_X(x)$	q	p

مميزات X: 1- التوقع والتباين

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = (0)(q) + (1)(p) = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = (0)^2(q) + (1)^2(p) = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{p \cdot q}$$

2 - الدالة المولدة للعزوم

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$M_X(t) = e^{t(0)} \cdot q + e^{t(1)} \cdot p = q + p \cdot e^{t} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ التوزيع الحداني:

إذا كررنا تجربة برنولية وسيطها p (احتمال النجاح) $\boxed{n}$ مرة حيث $n \geq 2$ هذه التكرارات مستقلة عن بعضها عندئذ نقول أن X الذي يمثل عدد مرات النجاح التوزيع الحداني.

تعريف: نقول عن المتغير العشوائي X إن له التوزيع الحداني بوسيطين n و p ونعبر عن ذلك بـ $X \sim b(n,p)$ إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x) = \overset{\text{توافيق}}{C_x^n} \, p^x \cdot q^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

أي أن له جدول التوزيع الاحتمالي

X	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
$f_X(x)$	q^n	$C_1^n \cdot p \cdot q^{n-1}$	$\dots$	$C_k^n \, p^k \cdot q^{n-k}$	$\dots$	p^n

مميزات X: 1- التوقع والتباين:

$$E(X) = n \cdot p$$
$$Var(X) = npq$$

(حسابياً أو باستخدام الدالة المولدة للعزوم)

2 - الدالة المولدة للعزوم

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^n p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_x^n (pe^t)^x q^{n-x}$$

حسب منشور ثنائي الحد نيوتن

$$= (pe^t + q)^n$$

$$(y+z)^n = \sum_{x=0}^{n} C_x^n y^x z^{n-x}$$

ثنائي الحدين

$$M'_X(t) = n(pe^t+q)^{n-1}\cdot(pe^t)$$

$$E(X) = M'_X(t)\Big|_{t=0} = n\cdot p$$

نعوض علماً أن
$\{p+q=1$

$$M''_X(t) = n(n-1)(pe^t+q)^{n-2}\cdot(pe^t)^2 + n(pe^t+q)^{n-1}(pe^t)$$

$$E(X^2) = M''_X(t)\Big|_{t=0} = n(n-1)p^2 + np$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np \quad n^2p^2$$

$$var(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

مبرهنة:

إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_n$ مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لكل منها توزيع برنولي بوسيط $\boxed{p}$ فإن المتغير العشوائي $Y = X_1+X_2+\dots+X_n$ له التوزيع الحداني بوسيطين n و p.

البرهان: بما أن المتغيرات مستقلة فإنه لدينا حسب مبرهنة:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)\cdot M_{X_2}(t)\cdot \dots\dots M_{X_n}(t)$$

$$= (q+pe^t)\cdot(q+pe^t)\cdot \dots (q+pe^t) = (q+pe^t)^n$$

وهي الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي يتبع التوزيع الحداني بالوسيطين n و p

وهكذا نلاحظ أن كل متغير عشوائي حداني وسيطيه n و p هو مجموع $\boxed{n}$ لمتغيرات عشوائية مستقلة لها التوزيع البرنولي بالوسيط p

انتهت المحاضرة الأولى

ملاحظة: دكتور المقرر الجديد علي القبوي