٢٠١٥/١٢/٢٣ المحاضرة الخامسة

تمرين: إذا كان معدل عدد الولادات في مشفى دار التوليد هو $\boxed{3}$ ولادات كل ساعة

١- ما هو احتمال أن تكون هناك حالة ولادة واحدة كل ساعة معينة.

2- ما هو احتمال أن تكون هناك 4 ولادات على الأكثر خلال ساعة واحدة.

الحل: إذا دلت X على عدد الولادات خلال ساعة فإن لـ X التوزيع البواسوني بالوسيط $\boxed{\lambda = 3}$ ويكون له دالة الاحتمال

$$f_X(x) = P(X \leq x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad ; \; x = 0, 1, 2, \dots$$

$$= e^{-3} \frac{3^x}{x!} \quad ; \; x = 0, 1, 2, \dots$$

ومنه:

$\boxed{1}$ $$P(X=1) = e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 3e^{-3} = 0{,}1493$$

$\boxed{2}$ $$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$P(X \leq 4) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} + e^{-3} \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \frac{3^2}{2!} + e^{-3} \frac{3^3}{3!} + e^{-3} \frac{3^4}{4!}$$

$$= 0{,}8153$$

مبرهنة (دون برهان) ليكن X_n متغيراً عشوائياً يتوزع وفق التوزيع الثنائي (الحدالي) بالوسيطين n و p أي أن $X_n \sim b(n, p)$

فإذا كان n و p يتغيران بحيث يبقى $\lambda = np$ ثابت موجب فإن:

$$\lim b(n, p) = P(\lambda)$$

وهذه المبرهنة تتحقق عندما n كبير جداً ويكون الجداء np صغيراً نسبياً ويكون التقريب مقبول من أجل $np < 5$ أو $nq < 5$ حيث $q = 1 - p$

تمرين:

كتاب مؤلف من 500 صفحة ويحتوي على 800 خطأً مطبعي موزع بشكل عشوائي على صفحات الكتاب فإذا فتحنا الكتاب على صفحة ما فما هو احتمال

١- أن يكون في الصفحة ثلاثة أخطاء مطبعية.

2- أن تخلو الصفحة من الأخطاء.

3- أن يكون في الصفحة خطأً مطبعي واحد على الأقل.

الحل إذا دلت X على عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة فإن X لـ التوزيع

الحداني بالوسيطين $n = 800$ و $p = \frac{1}{500}$

$$n \cdot p = \frac{800}{500} = 1,6 < 5$$

فيمكننا تطبيق التوزيع البواسوني بالوسيط $\lambda = np = 1,6$

كتقريب التوزيع الحداني ويكون

$\boxed{1}$ $$p(X=3) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-1.6} \frac{1^3}{3!} = 1,1378$$

$\boxed{2}$ $$p(X=0) = e^{-1,6} \frac{(1,6)^0}{0!} = e^{-1,6} = 0,2019$$

(3) $$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,2019 = 0,7981$$

وإذا أعدنا الحساب باستخدام التوزيع الحداني نجد

$$p(X=3) = \binom{n}{3} p^3 q^{n-3} = \binom{800}{3} \left(\frac{1}{500}\right)^3 \left(\frac{499}{500}\right)^{797} =$$

$$p(X=0) = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = \binom{800}{0} \left(\frac{1}{500}\right)^0 \left(\frac{499}{500}\right)^{800} = 0,2019$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X<1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,2019 = 0,7981$$

تمرين:

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad 1 < x < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$\boxed{1-}$ عين توقع وتباين X $\boxed{2-}$ عين دالة التوزيع $F(x)$

$\boxed{3-}$ أوجد $p(X > 2)$.

الحل إن X يتبع التوزيع المنتظم المستمر حيث $a = 1$ و $b = 3$

$\boxed{1-}$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2-

$F(x) = 0$ فإنّ $x \le 1$

فإنّ $1 < x < 3$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}[t]_1^x = \frac{x-1}{2}$$

فإنّ $x \ge 3$

$$F(x) = \int_0^1 0 \cdot dt + \int_1^3 \frac{1}{2}\,dt + \int 0 \cdot dt = 1$$

ومنه

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 1 \\ \frac{x-1}{2} & ; \quad 1 < x < 3 \\ 1 & ; \quad 3 \le x \end{cases}$$

3

$$p(X > 2) = 1 - p(X \le 2) = 1 - F(2)$$
$$= 1 - \left(\frac{2-1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

* تعريف: نقول عن متغير عشوائي إنه معياري إذا كان توقعه صفراً أو تباينه واحد.

التوزيع الطبيعي: نقول عن متغير عشوائي X إنّ له توزيعاً طبيعياً إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ 0 < \sigma < +\infty \end{cases}$$

ونرمز لذلك بـ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

التوزيع الطبيعي المعياري:

* تعريف: نقول عن متغير عشوائي Z إنّ له توزيعاً طبيعياً معيارياً إذا كان $Z \sim N(0,1)$ أي له دالة الكثافة التالية:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < +\infty$$

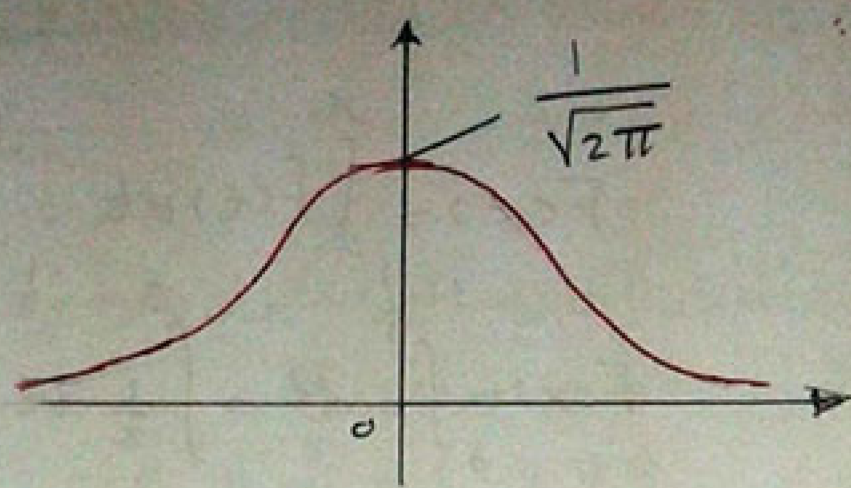
وبالتالي تكون دالة التوزيع المجمع له:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

نتيجة:

$\varphi(z) = \varphi(-z)$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$



مبرهنة: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكان $Y = aX + b$

فإن $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ $(a \neq 0)$

نتيجة: إذا كان $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن المتغير العشوائي

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ملاحظة: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X - \mu \le x - \mu)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

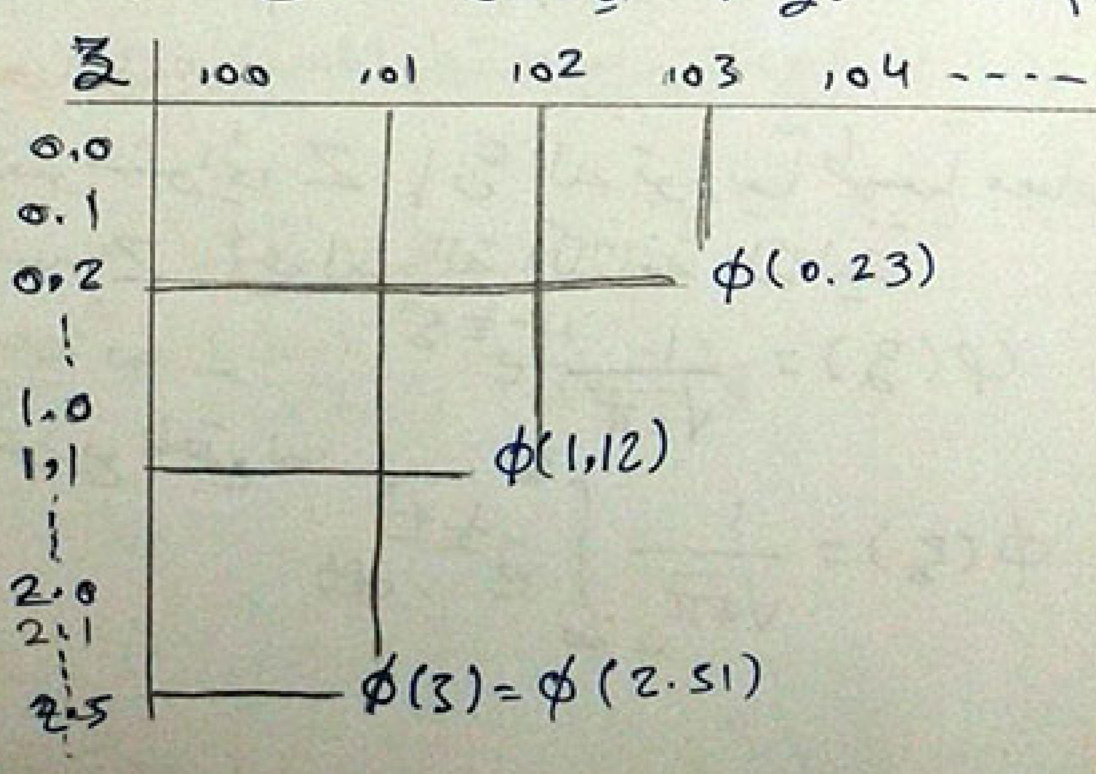
$$F_X(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

جدول التوزيع الطبيعي وطريقة استخدامه

إن هذا الجدول يعطي قيم دالة التوزيع $\phi(z)$ ابتداءً من الصفر وبفاصل (0,01) بين كل قيمة والتي تليها

1. العمود الأيسر يحوي قيم z ابتداءً من الصفر وبفاصل (0,1)
2. السطر الرأسي يحوي المنزلة العشرية الثانية لقيم z
3. قيم الدالة $\phi(z)$ هي ملتقى سطر مع العمود المقابل لـ z

مثال في كيفية إيجاد $\phi(z)$



وسيتم توضيح استخدامه في محاضرة لاحقة

انتهت المحاضرة الخامسة