الموضوع: المحاضرة الاولى التاريخ: / / ٢٠

الفصل الاول: مقدمة في الفضاءات الاقليدية ← تعاريف الفضاءات / المتتاليات المتقاربة / المجموعات المتراصة والمترابطة

الفصل الثاني: الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات ← المشتق الجزئي / المشتق الاتجاهي / خواص الدوال القابلة للاشتقاق

الفصل الثالث: تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات ← نظرية القيمة الوسطى / نظرية تايلور / نظرية القيم الصغرى والكبرى

الفصل الرابع: معالجة هندسية للحساب التفاضلي للمتجه

الفصل الخامس: حساب التكاملات المضاعفة

الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ (المألوف)

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية ونرمز بـ $\mathbb{R}^n$ الجداء الديكارتي للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها n مرة

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$$

ولنزود $\mathbb{R}^n$ بعملية الجمع $(+)$ كعملية داخلية و $(\cdot)$ خارجية

$\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

ويدعو $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ فضاء متجهي شعاعي

النظيم: هو دالة معرفة على فضاء متجهي x ومستقرة في $\mathbb{R}$ نرمز له بالرمز $\|\cdot\|$

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

وتحقق الشروط الأربعة التالية:

1) $\forall x \in X \quad : \quad \|x\| \geq 0$

2) $\forall x \in X \quad . \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_X$

3) $\forall x \in X \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad . \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

4) $\forall x , y \in X \ , \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

متراجحة المثلث

ندعو $(X , \|\cdot\|)$ فضاء منظم

مثال: لنعرف على الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ الدالة

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

برهن أن $(\mathbb{R}^n , \|\cdot\|)$ فضاء منظم

$\forall x , y \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1) إن $|x_i| \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$

$\Rightarrow \|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 0$

$\Longleftrightarrow |x_i| = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

$\Longleftrightarrow x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

$\Longleftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, 0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$

3) $\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| \, |x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$= |\alpha| \, \|x\|$

4) $\|x+y\| \overset{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$

لدينا $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \quad : (i = 1, \dots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left[|x_i| + |y_i| \right] \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

ومنه $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

إذن $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ فضاء منظم

مثال وظيفة: 1) ليكن $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهي ولنعرف الدالة

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

يمكن أن نعرف أكثر من نظيم على نفس الفضاء

$$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

2) نفرض أن $(l^\infty, +, \cdot)$ فضاء متجهي، حيث l^∞ مجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحدودة أي إذا كان $x = \{x_i\}_{i \geq 1} \in l^\infty$ فإن $|x_i| \leq c$

و l^∞ مزودة بعمليتي الجمع والضرب التاليتين:

$$x + y = \{x_i + y_i\}_{i\geq 1} = \{x_i\}_{i\geq 1} + \{y_i\}_{i\geq 1}$$

$$\alpha x = \{\alpha x_i\}_{i\geq 1} = \alpha \{x_i\}_{i\geq 1}$$

برهن أن $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}^*} |x_i|$ تحدد نظيم على l^∞

3) ليكن $X = C[a,b]$ فضاء كل الدوال المستمرة على $[a,b]$ ولنعرف عليه الدالتين:

1) $\forall\, t \in [a,b] \ , \ \|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$

2) $\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)|\, dt$.

برهن أن كلا من $(X, \| \|_1)$ و $(X, \| \|_2)$ فضاء منظم

الجداء الداخلي: ليكن X فضاء متجهي نعرف الجداء الداخلي بأنه دالة منطلقها الجداء الديكارتي $X \times X$ ومستقرها $\mathbb{R}$

ويرمز لها بـ $\langle \, , \rangle$

$$\langle \, , \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

ويجب تحقق الشروط (المسلمات) التالية:

1) $\forall x \in X \quad , \langle x, x \rangle \geq 0$

2) $\forall x \in X \quad , \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0_X$

3) $\forall x, y \in X \quad , \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4) $\forall x, y \in X \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad , \langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

5) $\forall x, y, z \in X \quad , \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

وعندئذ ندعو الفضاء $(X, \langle \, , \rangle)$ فضاء الجداء الداخلي

مثال: نعرف على $\mathbb{R}^n$ الدالة التالية:

$$\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

برهن أن هذه الدالة هي دالة جداء داخلي

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = 0$

$\Longleftrightarrow x_i^2 = 0 \quad ; (i = 1, \ldots n)$

$\Longleftrightarrow x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots n)$

$\Longleftrightarrow x = (0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$