/ /

المحاضرة الثانية — ٦/٣/٢٠١٥م

تعريف:

1-1-8. لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و S مجموعة غير خالية $\Phi \neq S \subseteq R$

نقول عن المجموعة S أنها حلقة جزئية في R إذا وفقط إذا:

$(S,+,\cdot)$ حلقة بحد ذاتها. (قوانين S التشغيل هي نفسها قوانين R)

1-1-9. أمثلة:

1) $R=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة — $(n\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة جزئية في R — n: أي عدد صحيح موجب

2) $R=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ حلقة فإن:

$2\mathbb{Z}_6=(\{0,2,4\},+,\cdot)$ ، $(3\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$

حلقة جزئية

3) $R=(\mathbb{Z}[\sqrt{p}],+,\cdot)$ حلقة جزئية من $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

p عدد أولي

1-1-10. مبرهنة:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و S مجموعة $\Phi \neq S \subseteq R$

S حلقة جزئية في R إذا وفقط إذا: $\leftrightarrow$

1) $x,y \in S : x-y \in S$

2) $x,y \in S : x\cdot y \in S$

الإثبات:

$\Leftarrow$ نفرض S حلقة جزئية ولنبرهن صحة الشرطين

بما أن S حلقة بحد ذاتها أي S مغلقة للجمع والضرب ولكل عنصر منها له نظير جمعي

$x,y \in S \rightarrow x,y,-y \in S$

$x-y \in S$, $x\cdot y \in S$

/ /

← لنتحقق صحة الشرطين ولنبرهن ان S حلقة بالنسبة لقانوني التشكيل $+ , .$ (المعرفين على IR)

1) S غير خالية حسب الفرض

2) $S \neq \phi \to \exists a \in S \to a-a=0 \in S$ حيادي الجمع

(الحيادي موجود $e=0\in S$) من الشرط (1) نأخذ $x=y=a$ نحصل على $a-a=0$

3) $x\in S \to -x=0-x\in S$ كل عنصر له نظير

من الشرط (1) نأخذ $x=0$ $y=-x$

4) $x,y\in S \to x,-y\in S \to x+y=x-(-y)\in S$ + عملية داخلية

من (1)

5) $x,y,z\in S\subseteq IR : (x+y)+z = x+(y+z)$ خاصية تجميعية.

$x,y\in S\subseteq IR$

$x+y=y+x \to (S,+)$ زمرة تبديلية.

5) شرط داخلي $\forall x,y\in S \to x.y\in S$ من الفرض (2)

6) تجميعي $(x.y).z = x.(y.z)$

$(S,.)$ شبه زمرة.

$x,y,z\in S\subseteq IR$

7) شرط التوزيع $x.(y+z)=xy+xz$

$(y+z)x = yx+zx$ التوزيع من اليمين واليسار

II-1-1 أمثلة:

*1 $IR(Z,+,.)$ حلقة $S=(2Z,+,.)$ حلقة جزئية من IR $S\subseteq IR$

*2 $IR=(\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix} a,b\in IR\},+,.)$ حلقة $S=\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}: a\in R\},+,.)$ حلقة جزئية

*3 $IR=(M_2(R),+,.)$ حلقة لها $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ حيادي لكن IR لا تحوي الحيادي

الحلقتان [illegible] $S=\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}: a\in IR\},+,.)$ حلقة جزئية

/ /

1-1-4 مبرهنة:

لتكن $(\mathbb{R},+,\cdot)$ حلقة و $[H_i : i\in I]$ مجموعة كل الحلقات الجزئية من $\mathbb{R}$

$H=\bigcap_{i\in I} H_i \subseteq \mathbb{R}$ حلقة جزئية في $\mathbb{R}$

[معنى المبرهنة: تقاطع حلقات جزئية هو حلقة جزئية]

الإثبات:

1) $\forall i\in I: 0\in H_i \rightarrow 0\in H \rightarrow H\neq\phi$ لان المحايد الجمعي ينتمي لجميع الحلقات الجزئية

2) $\forall x,y\in H \rightarrow x,y\in H_i \quad \forall i\in I$ معرف ينتمي للتقاطع.

$\rightarrow x\cdot y\in H_i$ و $x\cdot y\in H. \quad \forall i\in I$ إذا كان عنصر ينتمي للتقاطع معناه ينتمي

بما أن H_i حلقة فهي مغلقة للضرب لجميع الحلقات الجزئية.

$\rightarrow x-y\in H_i$ و $x-y\in H.$

$\rightarrow H\in\mathbb{R}$ حلقة جزئية.

تمرين:

اذا كانت S_1, S_2 حلقات جزئية من $\mathbb{R}$ فإن:

1) ليس بالضرورة اجتماع حلقتين جزئيتين ان يكون $S_1\cup S_2$ حلقة جزئية في $\mathbb{R}$

2) $S=S_1\cup S_2$

يكون الاجتماع لحلقتين جزئيتين حلقة جزئية إذا تحقق $S_1\subseteq S_2$ او $S_2\subseteq S_1$

1-2- التشاكل الحلقي:

1-2-1: تعريف:

لتكن R, S حلقتين نقول عن التطبيق $\varepsilon: \mathbb{R}\longrightarrow S$

تشاكل حلقي إذا:

1) $x,y\in\mathbb{R}: \varepsilon(x+y)=\varepsilon(x)+\varepsilon(y)$ شرطان لانه لدينا قانونا تشكيل.

2) $x,y\in\mathbb{R}: \varepsilon(x\cdot y)=\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(y)$

مثال

$\varepsilon : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ ★ حيث p: عدد أولي.

تشاكل 1) $x \in \mathbb{Z} : \varepsilon(x) = x \pmod{p}$

★ $\varepsilon : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

ليس تشاكل لأن $x \in \mathbb{Z} : \varepsilon(x) = 3x$

مثال عددي $\varepsilon(x.y) = \varepsilon(x).\varepsilon(y)$ — $\varepsilon(9) = 3.9 = 27$

$3x.y \neq 3x.3y = 9xy$ — $\varepsilon(9) = \varepsilon(3.3) = \varepsilon(3).\varepsilon(3) = 3.3.3.3 = 81$

★ تسمى المجموعة $\ker(\varepsilon) = \{r \in R : \varepsilon(r) = 0\}$ نواة ε

هي مجموعة العناصر التي صورها وفق تطبيق ما = 0

★ $Im(\varepsilon) = \{\varepsilon(r) \in S : r \in R\}$ وهو مستقر الحلقي.

ا-ح-ح مبرهنة:

إذا كان $\varepsilon : R \longrightarrow S$ تشاكل حلقي فإن القضايا التالية صحيحة:

1) $\varepsilon(0_R) = 0_S$

2) $r \in R : \varepsilon(-r) = -\varepsilon(r)$

3) $A \subseteq R \longrightarrow \varepsilon(A) \subseteq S$

4) $\beta \subseteq S \longrightarrow \varepsilon^{-1}(\beta) \subseteq R$

5) $\ker(\varepsilon) \subseteq R \quad Im(\varepsilon) \subseteq S$

6) ε متباين $\Leftrightarrow \ker(\varepsilon) = \{0\}$

الإثبات:

(1) $0 = 0 + 0 \longrightarrow \varepsilon(0) = \varepsilon(0+0)$ لأنه تشاكل

$\varepsilon(0) = \varepsilon(0) + \varepsilon(0)$

$\varepsilon(0) - \varepsilon(0) = \varepsilon(0) + \varepsilon(0) - \varepsilon(0)$

$0 = \varepsilon(0)$

(5) $\ker(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}(\{0\})\subseteq R$ ص٣٢

$\operatorname{Im}(\varepsilon)=\varepsilon(R)\subseteq S$

(6) $x,y\in R:\ \varepsilon(x)=\varepsilon(y)$ بفرض $\ker(\varepsilon)=\{0\}\leftarrow$

$\ast\to\varepsilon(x)-\varepsilon(y)=0\to\varepsilon(x-y)=0$

$x-y\in\ker(\varepsilon)=\{0\}\to x-y=0\to x=y\to$ متباين ε

بفرض ε متباين $\to$

$\forall x\in\ker(\varepsilon)\to\varepsilon(x)=0$

من (1) $\varepsilon(0)=0$

$\to\varepsilon(0)=\varepsilon(x)\to x=0$

$\to\ker(\varepsilon)=\{0\}$

ملاحظة:

اذا كان التشاكل الحلقي $\varepsilon: R\to S$ متباين وغامر

نقول عن ε انه تماثل ونرمز له بـ $R\cong S$

ويمكن القول انه $S\cong R$ لان التطبيق العكسي ايضا تماثل (اي علاقة متبادلة)

1.2.3 مبرهنة:

ليكن $\varepsilon: R\to S$ تشاكل حلقي غامر فان القضايا التالية صحيحة:

1) $\varepsilon(1_R)=1_S$ الحلقات احادية

2) R تبديلية $\to$ S تبديلية

الإثبات:

1) $y \in S : \exists x \in \mathbb{R} \; ; y = \varepsilon(x)$

$* \; y \cdot \varepsilon(1) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(1)$.

$= \varepsilon(x \cdot 1) = \varepsilon(x) = y$.

$* \; \varepsilon(1) \cdot y = \varepsilon(1) \cdot \varepsilon(x)$

$= \varepsilon(1 \cdot x) = \varepsilon(x) = y$

ومنه $\varepsilon(1)$ حيادي في S

وبالتالي $1_S = \varepsilon(1)$

2) $\mathbb{R}$ تبديلية $y_1 , y_2 \in S : \exists \; x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$؛

$y_1 = \varepsilon(x_1) \qquad y_2 = \varepsilon(x_2)$

$y_1 \cdot y_2 = \varepsilon(x_1) \cdot \varepsilon(x_2) = \varepsilon(x_1 \cdot x_2)$

$= \varepsilon(x_2 \cdot x_1) = \varepsilon(x_2) \cdot \varepsilon(x_1) = y_2 \cdot y_1$

ومنه S تبديلية.