. استكمال حل التمرين السابق

. نعوض بالمعادلة التفاضلية

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

نبدل كل $n$ ب $n+1$ / نبدل كل $n$ ب $n+2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)C_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}x^n - \sum_{n=1} nC_n x^n + \sum_{n=0} C_n x^n =$$

$$-(1)(2)C_2 + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n+1)C_{n+1} - (n+1)(n+2)C_{n+2} - nC_n + C_n\right]x^n = 0$$

. بالمطابقة نجد

$$-2C_2 + C_0 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2}$$

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1)C_{n+1} + (1-n)C_n}{(n+1)(n+2)} \quad , n \geq 1$$

$$n=1 \Rightarrow C_3 = \frac{(2)C_2 + 0}{(2)(3)} = \frac{2C_2}{6} = \frac{C_0}{6} = C_3$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{(2)(3)C_3 + (-1)C_2}{(3)(4)} = \frac{6C_3 - C_2}{12}$$

$$= \frac{6\cdot\frac{C_0}{6} - \frac{C_0}{2}}{12}$$

$$= \frac{C_0}{2 \times 12}$$

$$C_4 = \frac{C_0}{4!}$$

$$n = 3 \Rightarrow C_5 = \frac{(3)(4)C_4 + (-2)C_3}{(4)(5)}$$

$$= \frac{12C_4 - 2C_3}{(4)(5)}$$

$$= \frac{\frac{3.4.C_0}{2.3.4} - \frac{2C_0}{2.3}}{4.5} = \frac{C_0}{2.3.4.5}$$

$$\boxed{C_5 = \frac{C_0}{5!}}$$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$$ لكل الحدا،

$$= C_0 + C_1 x + \frac{C_0}{2} x^2 + \frac{C_0}{3!} x^3 + \frac{C_0}{4!} x^4 + \frac{C_0}{5!} x^5 + \dots$$

$$= C_1 x + C_0 \left[ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right]$$

مشور مشهور

$$= C_1 x + C_0 (e^x - x)$$ إذا كان مشور

مشهور كتب

$$\boxed{y = (C_1 - C_0)x + C_0 e^x}$$ ارجا كه اك

$[e^x, \sin x, \cos x \dots]$

أوجد الحل العام .... وذلك في شكل سلسلة قوى لـ $x$ من القوى الخاصة بجوار $x_0=0$ :

$$(x^2-1)\,y'' + 3xy' + xy = 0 \quad \text{---} \; (1)$$

نلاحظ أن $x_0=0$ نقطة عادية

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;,\; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1} \;\ldots$$

نعوض في (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, c_{n+2} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$-(1)(2)c_2 - (2)(3)c_3 x + 3(1)c_1 x + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[ n(n-1)c_n - (n+1)(n+2)c_{n+2} + 3nc_n + c_{n-1} \Big] x^n$$

$$-2C_2 + [-6C_3 + 3C_1 + C_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[\cdots]x^n = 0$$

بالمطابقة نجد :

$$-2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$-6C_3 + 3C_1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{3C_1 + C_0}{6}$$

$$\therefore C_3 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}$$

$$C_{n+2} = \frac{[n(n-1)+3n]C_n + C_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 2$$

$$n = 2 \Rightarrow C_4 = \frac{8C_2 + C_1}{(3)(4)} = \frac{C_1}{12} = C_4$$

$$n = 3 \Rightarrow C_5 = \frac{15C_3 + C_2}{(4)(5)} = \frac{3}{4}C_3 = \frac{3C_1}{8} + \frac{C_0}{8}$$

الحل العام :

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots$$

$$= C_0 + C_1x + 0 + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_0}{6}\right)x^3 + \frac{C_1}{12}x^4 + \left(\frac{3C_1}{8} + \frac{C_0}{8}\right)x^5 + \cdots$$

$$= C_0\left[1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right] + C_1\left[x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{8} + \cdots\right]$$

معادلة ليجندر: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

بجوار الـ $x_0 = 0$ مدى عددين متتاليين

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - \underbrace{K(K+1)}y = 0 \quad \text{---} (1)$$

هذا الشكل العام لمعادلة "ليجندر" من الرتبة $K$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n , \quad y' = \text{------} , \quad y'' = \text{----}$$

نعوض بالمعادلة (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n$$

$$- K(K+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n = 0.$$

نوحد الأسس

$$\text{------} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)C_{n+2}x^n + \text{-----} = 0$$

نوحد الحدود الأولى المشتركة

$$-(1)(2)C_2 - (2)(3)C_3x + (2)(1)C_1x - K(K+1)(2)C_2$$

$$- K(K+1)(3)(2)C_3x + \sum_{n=2}^{\infty}[\text{---}]x^n = 0$$

بالمطابقة نجد

$$C_2 = \frac{-K(K+1)}{2!}C_0$$

$$C_3 = \frac{(2+K)(1-K)}{3!}C_1$$

$$C_{n+2} = \frac{n(n-1)+2(n)-k(k+1)}{(n+1)(n+2)} C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{-(n-k)(n+(k+1))}{(n+1)(n+2)} C_n \quad ; \; n \geq 2$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{(3+k)(2-k)}{3.4} C_2$$

$$= \frac{-(3+k)(2-k)(k+1)k\,C_0}{2.3.4}$$

$$C_4 = \frac{-(3+k)(2-k)(1+k)k\,C_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{(4+k)(3-k)}{4.5} C_3$$

$$= \frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)}{2.3.4.5} C_1$$

$$C_5 = \frac{(4+k)(3-k)(2+k)(1-k)}{5!} C_1$$

$$C_6 = \frac{-(5-k)(4+k)(3+k)(2+k)(1-k)k}{6!}$$

اذا كان هناك معادلة من هذا الشكل يمكن حلها
مباشرة من القوانين

وظيفة: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار الصفر

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - \overbrace{6}^{2(3)}y = 0 \quad \ldots ①$$

هذه معادلة ليجندر يمكن حلها بطريقة عادية او بقوانين لوجندر

الحل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة ① نجد

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$-(1)(2)C_2 - (2)(3)C_3 x + 2C_1 x - 6C_0 - 6C_1 x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1) C_n - (n+1)(n+2) C_{n+2} + 2n C_n - 6 C_n \right] x^n = 0$$

بالمطابقة نجد

$$-2C_2 - 6C_0 = 0 \Rightarrow 2C_2 = -6C_0$$

$$C_2 = -3C_0$$

$$-6C_3 x + 2C_1 x - 6C_1 x = 0$$

$$+6C_3 x = -4C_1 x \Rightarrow C_3 = \frac{-2}{3} C_1$$

$$(n+1)(n+2) C_{n+2} = \left[ n(n-1) + 2n - 6 \right] C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{n^2+n-6\, C_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+3)(n-2)C_n}{(n+1)(n+2)} ; n \geq 2$$

$$n=2 \Rightarrow C_4 = \frac{5 . 0\, C_2}{3 . 4} = 0$$

$$n=3 \Rightarrow C_5 = \frac{6 . 1\, C_3}{4 . 5} = \frac{6\left(\frac{-2}{3} C_1\right)}{4 . 5} = \frac{-C_1}{5}$$

$$n=4 \Rightarrow C_6 = \frac{7 . (2)\, C_4}{5 . 6} = 0$$

حاك

يمكن التعويض مباشرة بقوانين لبعدد ...

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

$$y = C_0 + C_1 x + 0(3C_0)x^2 + \left(-\frac{2}{3} C_1\right)x^3 + \left(-\frac{C_1}{5}\right)x^5 + 0 +$$

$$y = C_0\left(1 - 3x^2 + \dots\right) + C_1\left(x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \dots\right)$$