المحاضرة الثالثة :

1 - تعريف الدالة ذات التغير المحدود على $[a,b]$
- تعريف الدالة ذات التغير المحدود على $[0,+\infty[$
- تعريف الدالة ذات التغير المحدود على $]-\infty,b]$
- تعريف الدالة ذات التغير المحدود على $]-\infty,+\infty[$

2 - ملاحظات :

① $P \subset P' \Rightarrow V(f,P) \leqslant V(f,P')$

② $[a',b'] \subseteq [a,b] \Rightarrow \overset{b'}{\underset{a'}{V}} f \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}} f$

③ $P \subset P' \Rightarrow \Delta P \geqslant \Delta P'$

3 - خواص الدوال ذات التغير المحدود :

① - كل دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هي دالة محدودة ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح. مثل ($x \cos \frac{\pi}{2x}$) .

② - إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$
فإن af دالة تغير محدود على $[a,b]$
وإن $|f|$ دالة تغير محدود على $[a,b]$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح

③ إذا كانت f, g دالة تغير محدود على $[a,b]$ فإن :
$f+g$ و $f-g$ و $f.g$ دوال ذات تغير محدود على $[a,b]$
و f/g دالة ذات تغير محدود بشرط $g \neq 0$

④ إذا كانت f دالة تغير محدود على $[a,b]$ فإن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f \quad : \quad a < c < b$$

Magic Book

⑤ - كل دالة مطردة على $[a,b]$ هي دالة تغير محدود على $[a,b]$ تحقق

$$\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$$

⑥ f دالة ذات تغير محدود على $[a,b] \Leftrightarrow f = g - \psi$ حيث g و ψ دوال متزايدة على $[a,b]$

بعض التوضيحات للعناوين السابقة.

[1] - التعاريف :

- الدالة ذات التغير المحدود على $[a,+\infty[$ إذا كانت دالة ذات تغير محدود على أي مجال جزئي مغلق من $[a,+\infty[$

- وبنفس الأسلوب نعرف دوال ذات التغير المحدود على المجالات $]-\infty,b]$ و $]-\infty,+\infty[$.

[2] - ملاحظات :

إن $P \subset P'$ تعني أن التجزئة P' أدق من التجزئة P أو (P' أقوى من P)

مثال : أدق ↓

$P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$P' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$

$P'' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

- إثبات ملاحظة ① : لتكن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ولتكن

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \ ; \ x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots x_n\}$$

$$P' = \{x_0 = a < x_1 \dots < x_i < x' < x_{i+1} < \dots < x_n = b\}$$

$$\bigvee_a^b (f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + \dots + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \dots$$

$$= \dots + |f(x_{i+1}) - f(x') + f(x') - f(x_i)| + \dots$$

$$\leq \dots + |f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)| + \dots$$

Magic Book

$$\bigvee_a^b(f,P) \leqslant \bigvee_a^b(f,P') \quad \text{وهذه تدل أن}$$

- الملاحظة رقم ② نتيجة عن ①.

- ③ - إن ΔP معرف بالشكل التالي: $\Delta P = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{(x_k - x_{k-1})\}$

مثال: لتكن لدينا $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$P' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$

$P'' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

نلاحظ أن: $\Delta P = \frac{1}{2}$, $\Delta P' = \frac{1}{2}$, $\Delta P'' = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4}$

وأن $P \subseteq P' \subseteq P'' \Leftarrow \Delta P \geqslant \Delta P' \geqslant \Delta P''$

③ - خواص الدوال ذات التغير المحدود:

يمكن استخدام الخاصة (5, 6) كمعايير لتحديد فيما إذا كانت الدالة ذات تغير محدود أم لا.

ومثال على ذلك الدالة $f(x) = x^2 - x$ على المجال $[0,1]$.

نلاحظ أن كلاً من x^2 , x دالتان متزايدتان على $[0,1]$ وحسب الخاصة 6 نجد أن f دالة تغير محدود.

تمارين: ① - إذا كانت f , g دالتين متزايدتين على $[a,b]$ فأثبت أن كلاً من $f+g$ دالة متزايدة ولكن $f-g$, $f.g$, f/g حيث $g \neq 0$ ليس بالضرورة أن تكون دوال متزايدة على $[a,b]$، بين ذلك بمثال.

② - بين أن $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ دالة تغير محدود على $[2, +\infty[$ ثم أوجد $\bigvee_2^{+\infty} f$

③ - بين أن الدالة $F(x) = x^2 - x$ دالة تغير محدودة على $[0,1]$ ثم أوجد $\bigvee_0^1 f$

وبين أن الدوال $f(x) = x - |x|$, $g(x) = x - [x]$ حيث F معرفة على $[-3,3]$ و g على المجال $[0,1]$ ذات تغير محدود ← الجزء الصحيح من x

انتهت المحاضرة...