حلول عددية

المحاضرة الرابعة

٢٠١٥/٣/٢٣

تمرين: (دورة 2012 - 2013 - 25 درجة)

أوجد الشكل المصفوفي $AU=F$ باستخدام طريقة الفروق المنتهية لحل المسألة التالية: $\nabla^2 u = 0$

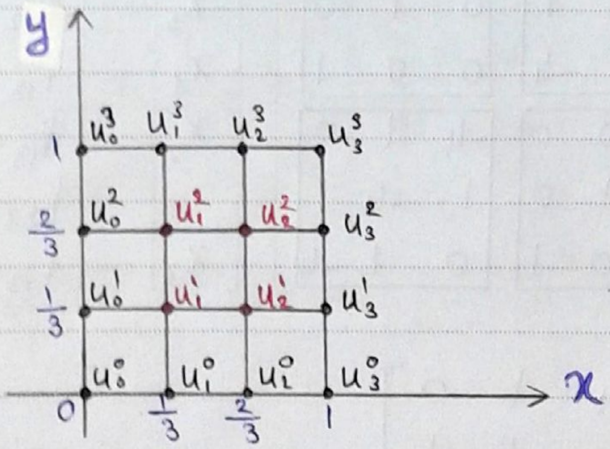
حيث المنطقة هي المربع: $R: \{0 \le x \le 1 \,,\ 0 \le y \le 1\}$

ومحيطها: $\Gamma: u(x,y) = x^2 - y^2$

وبفرض أن $h = \frac{1}{3}$

الحل: لدينا معادلة الفروق من الشكل:

$$u_{i-1}^{j} + u_{i+1}^{j} + u_{i}^{j-1} + u_{i}^{j+1} - 4u_{i}^{j} = 0$$



لدينا أربع نقاط داخلية، وبالتالي لدينا أربع معادلات خطية تابعة لها:

$i=1,\ j=1:\quad u_0^1 + u_2^1 + u_1^0 + u_1^2 - 4u_1^1 = 0$

$i=2,\ j=1:\quad u_1^1 + u_3^1 + u_2^0 + u_2^2 - 4u_2^1 = 0$

$i=1,\ j=2:\quad u_0^2 + u_2^2 + u_1^1 + u_1^3 - 4u_1^2 = 0$

$i=2,\ j=2:\quad u_1^2 + u_3^2 + u_2^1 + u_2^3 - 4u_2^2 = 0$

لنوجد القيم الحدية اللازمة (التي ظهرت في المعادلات) من الشرط الحدي المعطى :

$$u_1^0(x_1, y_0) = u_1^0\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \frac{1}{9}$$
$$u_2^0(x_2, y_0) = u_2^0\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{9}$$

$$u_0^1(x_0, y_1) = u_0^1\left(0, \frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{9}$$
$$u_0^2(x_0, y_2) = u_0^2\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{9}$$

$$u_1^3(x_1, y_3) = u_1^3\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{-8}{9}$$
$$u_2^3(x_2, y_3) = u_2^3\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \frac{-5}{9}$$

$$u_3^2(x_3, y_2) = u_3^2\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9}$$
$$u_3^1(x_3, y_1) = u_3^1\left(1, \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

لنعوض الآن في جملة المعادلات فنجد :

$$u_2^1 + u_1^2 - 4u_1^1 = 0$$
$$u_1^1 + u_2^2 - 4u_2^1 = \frac{-4}{3}$$
$$u_2^2 + u_1^1 - 4u_1^2 = \frac{4}{3}$$
$$u_1^2 + u_2^1 - 4u_2^2 = 0$$

ومنه فالشكل المصفوفي :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

تمرين: (دورة 2013 - 2014 تكميلي 25 درجة)

لتكن لدينا المعادلة: $\nabla^2 u = 0$.

ولتكن المنطقة D هي المربع: $0 \le x \le 1 \quad , \quad 0 \le y \le 1$

حيث الشروط الحدية هي:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{on } (y=0,\ y=1,\ x=0)$$

$$u + u_x = x^2 + 2x - y^2 \quad \text{on } x=1$$

أوجد الحل في D باستخدام طريقة الفروق المركزية، وبفرض $k = h = \frac{1}{2}$.

الحل: من الشرط الحدي الأول يمكننا إيجاد القيم الحدية:

$$u_0^1(x_0, y_1) = u_0^1\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

$$u_1^0(x_1, y_0) = u_1^0\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$$

$$u_1^2(x_1, y_2) = u_1^2\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = \frac{-3}{4}$$

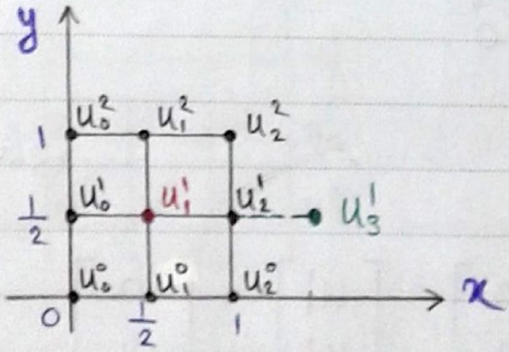
$$u_2^0(x_2, y_0) = u_2^0(1, 0) = 1$$

$$u_2^2(x_2, y_2) = u_2^2(1, 1) = 0$$

ملاحظة: إذا كانت $y=0$ أو $y=1$ أو $x=0$ يمكن استخدام الشرط الحدي الأول

إن شكل معادلة الفروق هو:

$$u_{i-1}^{j} + u_{i+1}^{j} + u_i^{j-1} + u_i^{j+1} - 4u_i^j = 0$$



لدينا نقطة داخلية واحدة، وبالتالي لدينا معادلة خطية واحدة:

$$i=1,\ j=1 : \quad u_0^1 + u_2^1 + u_1^0 + u_1^2 - 4u_1^1 = 0$$

بتعويض القيم الحدية نحصل على المعادلة:

$$u_2^1 - 4u_1^1 = \frac{3}{4} \quad (1)$$

إنّ القيمة u_2^1 هي قيمة مدية وينبغي إيجادها مصراً من الشرط الحدّي المختلط الثاني، ولكنّ هذا الشرط معقّد وسنأخذه بشكل نقطي عند هذه النقطة حيث سنعوض u_x في عبارة هذا الشرط بقانون الفروق المركزية، وذلك باعتبار نقطة وهمية u_3^1 على يمين النقطة u_2^1 كما يلي:

$$u_2^1 + \frac{\partial u}{\partial x}\Big]_2^1 = (x^2 + 2x - y^2)\Big]_{\substack{x=1\\ y=\frac{1}{2}}}$$

$$u_2^1 + \frac{u_3^1 - u_1^1}{2h} = 1 + 2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow u_2^1 + u_3^1 - u_1^1 = \frac{11}{4} \quad ---- \; (\star)$$

والآن يمكن تجاوزاً اعتبار النقطة u_2^1 نقطة داخلية وبتعويض $i=2$ ، $j=1$ في معادلة الفروق نجد:

$$u_1^1 + u_3^1 + \underbrace{u_2^0 + u_2^2}_{\text{حدي}} - 4u_2^1 = 0$$

$$\Rightarrow u_1^1 + u_3^1 + 1 + 0 - 4u_2^1 = 0$$

$$\Rightarrow u_1^1 + u_3^1 - 4u_2^1 + 1 = 0 \quad ---- \; (\star')$$

بطرح $(\star)$ من $(\star')$ نجد:

$$u_1^1 + \cancel{u_3^1} - 4u_2^1 + 1 - u_2^1 - \cancel{u_3^1} + u_1^1 + \frac{11}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2u_1^1 - 5u_2^1 = \frac{-15}{4}} \quad (2)$$

الآن أصبحت لدينا (1) و (2) معادلتين خطيتين بمجهولين، بالحل المشترك لهما نجد:

$$u_1^1 = 0 \quad , \quad u_2^1 = \frac{3}{4}$$

تمرين:

أوجد حل المعادلة : $\nabla^2 u = x + y$

في المنطقة R ذات الشروط الحدية: $u(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{6}$

حيث R عبارة عن المثلث :

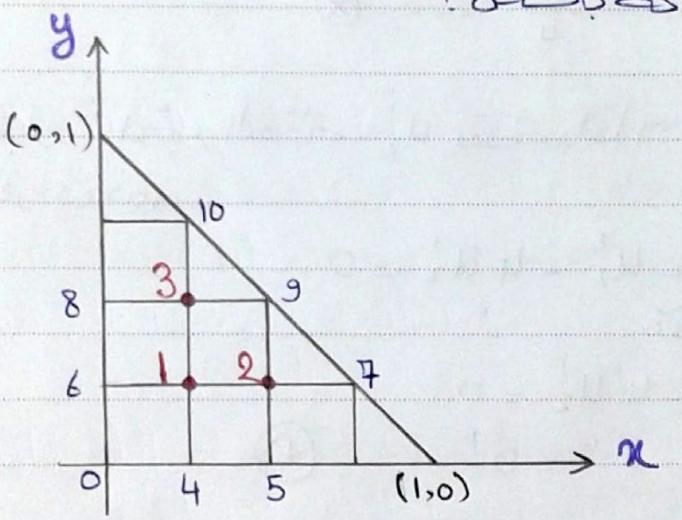
$$\{ 0 \le x \le 1 \quad , \quad 0 \le y \le 1 \quad , \quad 0 \le x+y \le 1 \}$$

وذلك باستخدام طريقة الفروق المركزية .

وبفرض أن $h = k = \frac{1}{4}$.

الحل: إن حدود المثلث هي: $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$

والشبكة موضحة بالشكل :



لدينا ثلاثة نقاط داخلية للشبكة 1 , 2 , 3 والتي إحداثياتها هي :

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

لنرمز للحلول عند هذه النقاط بـ u_1 , u_2 , u_3 على الترتيب .

/ /

من الشرط الحدي المعطى تنتج لدينا القيم:

$u_4 = u(\frac{1}{4},0) = \frac{1}{384}$, $u_5 = u(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{48}$

$u_6 = u(0,\frac{1}{4}) = \frac{1}{384}$, $u_7 = u(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \frac{7}{96}$

$u_8 = u(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{48}$, $u_9 = u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$

$u_{10} = u(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{7}{96}$

إنّ معادلة الفروق لها الشكل:

$$u_{i-1}^{j} + u_{i+1}^{j} + u_{i}^{j-1} + u_{i}^{j+1} - 4u_{i}^{j} = h^2(x+y)$$

عند u_1:

$$u_2 + u_3 + u_6 + u_4 - 4u_1 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -4u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{32} - \frac{1}{384} - \frac{1}{384} = \frac{5}{192} \quad (1)$$

عند u_2:

$$u_7 + u_9 + u_1 + u_5 - 4u_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -4u_2 + u_1 = \frac{3}{64} - \frac{7}{96} - \frac{1}{24} - \frac{1}{48} = \frac{-34}{384} \quad (2)$$

عند u_3:

$$u_9 + u_{10} + u_8 + u_1 - 4u_3 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -4u_3 + u_1 = \frac{3}{64} - \frac{1}{24} - \frac{7}{96} - \frac{1}{48} = \frac{-34}{384} \quad (3)$$

بطرح (2) من (3) نجد أنّ $u_2 = u_3$ ، وبهذا نحصل على المعادلتين:

$$-4u_1 + 2u_2 = \frac{5}{192} \quad , \quad u_1 - 4u_2 = \frac{-34}{384}$$

وبالحل المشترك نجد أنّ:

$$u_1 = \frac{1}{192} \quad , \quad u_2 = u_3 = \frac{9}{384}$$

تمرين:

أوجد حل المعادلة: $u_{tt} = u_{xx} \quad ; \quad 0 \le x \le 1$

حيث الشروط الحدية:

$u(x,0) = \sin(\pi x) \quad ; \quad 0 \le x \le 1$

$u_t(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le 1$

$\left.\begin{matrix} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{matrix}\right\} \quad ; \quad t > 0$

مستخدماً طريقة الفروق المركزية، وبفرض $h = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{8}$

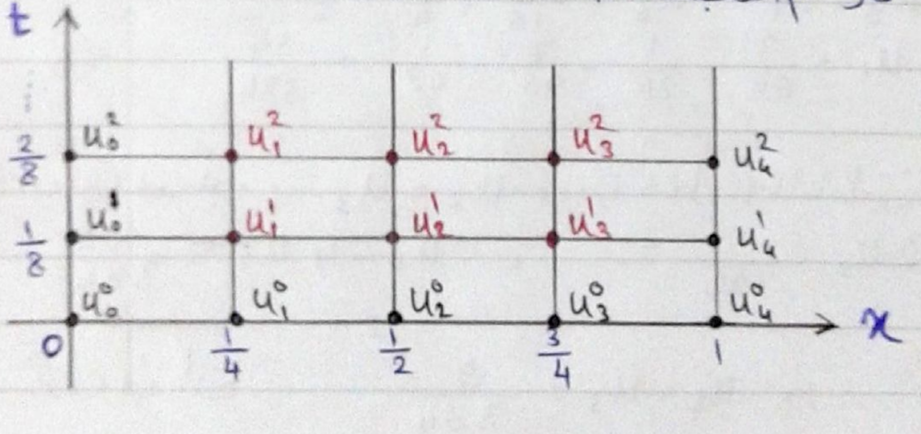
وذلك عند خطوة زمنية واحدة فقط.

ثم قارن الحل التقريبي مع الحل الفعلي: $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$

ملاحظة:

* إن هذه المعادلة زائدية وليست ناقصية، ولكن التعامل معها يشبه تماماً التعامل مع المعادلة الناقصية.
* إن المنطقة المدروسة هنا غير محدودة من الأعلى، وليس للزمن حد علوي ذو قيم حدية، وإنما علينا إيجاد القيم عند النقاط الداخلية في الخطوة الزمنية الأولى باعتبار النقاط التي فوقها نقاط داخلية أيضاً أي لا نستطيع الاعتماد عليها، هنا سوف يختلف الحل قليلاً بسبب ذلك وسيساعدنا شرط نيومان المعطى على الحل.

الحل: لنرسم الشبكة:



إن النقاط الداخلية عند الخطوة الزمنية الأولى هي : u_1^1 , u_2^1 , u_3^1

أما النقاط u_1^2 , u_2^2 , u_3^2 فهي أيضاً نقاط داخلية ولكن عند الخطوة الزمنية الثانية ، فهي غير مطلوبة و لا نستطيع بالمقابل الاعتماد عليها في حساب المطلوب لأنها غير معروفة وغير حدية .

بينما بقية النقاط المرسومة فهي حدية .

* استنتاج معادلة الفروق :

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\underset{\frac{1}{64} \leftarrow}{k^2}} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\underset{\rightarrow \frac{1}{16}}{h^2}}$$

$$\frac{1}{16}\left[u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}\right] = \frac{1}{64}\left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right]$$

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = \frac{1}{4}u_{i+1}^j - \frac{1}{2}u_i^j + \frac{1}{4}u_{i-1}^j$$

$$u_i^{j+1} = \frac{3}{2}u_i^j + \frac{1}{4}\left(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j\right) - u_i^{j+1}$$

وهي معادلة الفروق لهذه المسألة .

لنأخذ $j=0$ عندئذٍ :

$$u_i^1 = \frac{3}{2}u_i^0 + \frac{1}{4}\left(u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0\right) - u_i^{-1}$$

من الشرط الحدي نيومان (الثاني) لدينا : $u_t(x,0) = 0$ $\boxed{*}$

لدينا قانون الفروق المركزية :

$$u_t(x_i , t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} \Longrightarrow u_t(x_i , t_0) = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2k}$$

نعوض في $\boxed{*}$ فنجد :

$$u_i^1 - u_i^{-1} = 0$$

$$\Longrightarrow u_i^1 = u_i^{-1}$$

/ /

بالعودة إلى معادلة الفروق نجد:

$$2u_i^1 = \frac{3}{2}u_i^0 + \frac{1}{4}\left(u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0\right)$$

$$\Rightarrow u_i^1 = \frac{3}{4}u_i^0 + \frac{1}{8}\left(u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0\right)$$

وبتعويض قيم i المقابلة للنقاط الداخلية المطلوبة نجد:

$$i=1: \quad u_1^1 = \frac{3}{4}u_1^0 + \frac{1}{8}\left(u_0^0 + u_2^0\right)$$
$$i=2: \quad u_2^1 = \frac{3}{4}u_2^0 + \frac{1}{8}\left(u_1^0 + u_3^0\right)$$
$$i=3: \quad u_3^1 = \frac{3}{4}u_3^0 + \frac{1}{8}\left(u_2^0 + u_4^0\right)$$

لنوجد الآن القيم الحدية اللازمة من الشرط الحدي الأول:

$$u_0^0(x_0,t_0) = u_0^0(0,0) = \sin(0) = 0$$
$$u_1^0(x_1,t_0) = u_1^0\left(\tfrac{1}{4},0\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$u_2^0(x_2,t_0) = u_2^0\left(\tfrac{1}{2},0\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$
$$u_3^0(x_3,t_0) = u_3^0\left(\tfrac{3}{4},0\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$u_4^0(x_4,t_0) = u_4^0(1,0) = \sin\pi = 0$$

والآن أصبح لدينا بالتعويض:

$$u_1^1 = \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{8}(0+1) = \frac{3\sqrt{2}+1}{8} = 0.65533$$

$$u_2^1 = \frac{3}{4}(1) + \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6+\sqrt{2}}{8} = 0.92678$$

$$u_3^1 = \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{8}(1+0) = \frac{3\sqrt{2}+1}{8} = 0.65533$$

بالمقارنة مع الحل الفعلي نلاحظ تقارب الحلين حيث نجد:

$$u\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8}\right) = u\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{8}\right) = 0.65328 \quad , \quad u\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8}\right) = 0.92388$$

انتهت المحاضرة الرابعة