Subject: 13/5/2014

«المحاضرة الخامسة عشرة»

مبرهنة 5-1-6 :

- لتكن R حلقة تبديلية ، و $I \trianglelefteq R$. عندئذٍ :

إذا كانت R/I نيوثرية و I نيوثرية ، فإن : R نيوثرية .

«الإثبات» :

- لتكن لدينا :

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots\dots$ سلسلة متزايدة من المثاليات في R ..

عندئذٍ :

$\frac{I_1+I}{I} \subseteq \frac{I_2+I}{I} \subseteq \dots\dots$ سلسلة متزايدة من المثاليات في R/I ..

وكذلك :

$I_1 \cap I \subseteq I_2 \cap I \subseteq \dots\dots$ سلسلة متزايدة من المثاليات في I ..

(حسب الفرض) R/I نيوثرية $\Leftarrow$

$$\exists t \in \mathbb{N} : \forall i \geq t \,;\, \frac{I_t+I}{I} = \frac{I_i+I}{I} \Rightarrow$$

$$\exists t \in \mathbb{N} : \forall i \geq t \,;\, I_t + I = I_i + I$$

(حسب الفرض) I نيوثرية $\Leftarrow$

$$\exists s \in \mathbb{N} : \forall i \geq s \,;\, I_s \cap I = I_i \cap I$$

ولتكن : $n = \max\{s, t\}$ ، عندئذٍ :

$$\forall i \geq n \,;\, I_n + I = I_i + I \quad \wedge \quad I_n \cap I = I_i \cap I$$

$$\Rightarrow \forall i \geq n \,;\, I_n = I_n + (I_n \cap I) = I_n + (I_i \cap I)$$

(حسب الفرض)

$$= I_i + (I_i + I) = I_i$$

$\Leftarrow$ السلسلة تتوقف ، ومنه و (حسب مبرهنة) تكون R نيوثرية .

#

Subject:

ع 6-1-6 - مبرهنة: (Hilbert's Basis Theorm) ..

- لتكن R حلقة تبديلية ، عندئذٍ:
إذا كانت R نيوثرية فإن $R[x]$ تكون نيوثرية .

«الإثبات» :

- لتكن: $I \trianglelefteq R[x]$ ، سنميز حالتين :

$\boxed{1}$ - $\text{if } I = \langle 0 \rangle \Rightarrow$ I منتهي التوليد

وبالتالي (حسب مبرهنة) يتم المطلوب .

$\boxed{2}$ - $\text{if } \langle 0 \rangle \subsetneq I \trianglelefteq R[x]$

- لنعرف المثالي :

$$I_m := \{a \in R/[0] : \exists f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \in I \cup \{0\}\}$$

$a = a_m$ معامل رئيسي x^m غ R .

- ولكن (R نيوثرية) .. فيكون حينئذٍ المثالي I_m منتهي التوليد ..
أي أنه :

$$\exists a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_{t_m}} : I_m = \langle a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_{t_m}} \rangle$$

وكذلك : $I_m \subseteq I_{m+1}$ ..

وبما أن R نيوثرية .. فإنه :

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n ; I_n = I_i \quad : I_n = \langle a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{m_n}} \rangle$$

أي أن I_n منتهي التوليد وبالتالي السلسلة سوف تتقطع ..

*) - لنبرهن أن المثالي I مولد بالحدوديات التالية :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \wedge j \in \{1, \dots, m_n\} ;$$

$$I_{ij} = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{m_i}} \rangle$$

أي الحدوديات :

$I_{0_1} = \langle a_{0_1}, a_{0_2}, a_{0_3}, \dots, a_{0m_0} \rangle, \dots\dots$

$\dots, I_{1_1} = \langle a_{1_1}, a_{1_2}, \dots, a_{1m_1} \rangle, \dots\dots$

$\dots, I_{n_{m_n}} = \langle a_{n_1}, \dots, a_{nm_n} \rangle$

وبالتالي سوف نبني أن الحدوديات المقابلة للعناصر $(a_{ij} \in R)$ والتي هي :

$f_{ij} : \forall i \in \{0, \dots, n\} \wedge j \in \{1, \dots, m_n\}$

أي :

$f_{0_1}, f_{0_2}, \dots, f_{0m_0}, \dots, f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{nm_n}$

تولد مثالي ..

- لنعرف لأجل ذلك مثالي جديد A مولد بهذه الحدوديات ، ولنثبت أن : «$I = A$»

$A = \langle f_{0_1}, \dots, f_{0m_0}, \dots, f_{n_1}, \dots, f_{nm_n} \rangle \trianglelefteq R[x]$

فإذا كان «$I = A$» سيكون حينئذٍ I منتهي التوليد ويكون $R[x]$ نيوثري ..

* - $\boxed{A \subseteq I}$ لأن :

$\forall i \in \{0, \dots, n\} \wedge j \in \{1, \dots, m_n\}$ ف

$\ell(f_{ij}) = a_{ij} \in I_i$

$\Rightarrow$ (حسب التعريف) $f_{ij} \in I \Rightarrow A \subseteq I$;

** - $\boxed{I \subseteq A}$ لأن :

- لتكن : $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{s} c_i x^i \in I$

ولنبرهن أن : $f(x) \in A$ ، وذلك بالاستقراء الرياضي على ..
$(\deg(f) = س)$

1 - من أجل (($س = 0$))

$$\Rightarrow f = c_0 \in I_0 \Rightarrow c_0 \in I_0 = \langle f_{0_1}, \dots, f_{0m_0} \rangle$$

ولكن $(I_0 \subseteq A)$ .. عندئذ يكون : $c_0 \in A$ .. $\Leftarrow$ $f \in A$

$\Leftarrow$ القضية محققة.

2 - لنفرض صحة العلاقة لأجل كل الحدوديات التي درجتها أقل من س ، ولنبرهن صحة القضية لأجل (س) ..

وهنا سوف نميز حالتين :

1 - (($n > س$)) .

$$\Rightarrow I_س \subseteq I_n \wedge \mathcal{L}(f) = c_س \in I_س$$

ولكن :

$$I_س = \langle a_{س_1}, \dots, a_{س_{m_س}} \rangle$$

$$\Rightarrow \exists r_1, r_2, \dots, r_{m_س} \in R : c_س = r_1 . a_{س_1} + r_2 . a_{س_2} + \dots + r_{m_س} . a_{س_{m_س}}$$

لنعرف الحدودية :

$$g(x) := f - (r_1 . f_{س_1}, \dots, r_{m_س} . f_{س_{m_س}}) . x^{n-س}$$

وبالتالي تكون : $g(x) = 0 \vee \deg(g(x)) < س$

وفي كلتا الحالتين تكون :

$$f = \underbrace{g(x)}_{\in A} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m_س} r_i . f_{س_i}}_{\in A} \Rightarrow f \in A$$

$$\Rightarrow I \subseteq A$$

Subject:

$\boxed{2}$. « $n \leq s$ »

$\Rightarrow I_s = I_n \quad \wedge \quad \mathcal{L}(f) = c_s \in I_n$:

$I_n = \langle a_{n_1}, \ldots\ldots, a_{n_{m_n}} \rangle$

$\Rightarrow \exists r_1, r_2, \ldots, r_{m_n} \in R : c_s = r_1 . a_n + \ldots\ldots + r_{m_n} . a_{n_{m_n}}$

- لنعرف الحدودية :

$g(x) := f - (r_1 . f_{n_1}, \ldots\ldots, r_{m_n} . f_{n_{m_n}}) . x^{s-n}$

وبالتالي تكون : $g(x) = 0 \quad \vee \quad \deg(g(x)) < s$

وفي كلتا الحالتين تكون :

$f = \underset{\in A}{g(x)} + \underset{\in A}{\sum_{i=1}^{m_n} r_i . f_{s_i}} \Rightarrow f \in A$

$\Rightarrow I \subseteq A$

- مما سبق ، في كلتا الحالتين $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ وجدنا أن $I \subseteq A$ ..

ومن الاحتوائين يتضح أن : « $I = A$ »

وبالتالي : I منتهي التوليد ، (حسب مبرهنة سابقة) تكون $R[x]$ حلقة نيوثرية .

#

* نتيجة :

- إذا كانت R نيوثرية $\Leftarrow R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ نيوثرية .

لأنه :

$R_1 = R[x_1]$ نيوثرية (حسب مبرهنة هيلبرت الأساسية)

$R_2 = R_1[x_2] = R[x_1, x_2]$ نيوثرية (حسب مبرهنة هيلبرت الأساسية)

وبالاستقراء على هذا النحو نجد أن ؛

Subject:

$R_n = R[x_1, \ldots, x_n]$ نيوثرية (م. ب هيلبرت الأساسية)

$\#$

Subject:　　　　/　/

6-2- الحلقات الآرتينية :

6-2-1- تعريف :

- لتكن R حلقة تبديلية ، عندئذٍ :

*) - نقول إن R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة (d.c.c) إذا كان من أجل أي سلسلة من المثاليات في R .

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n$ و $I_i = I_n$

**) - R آرتينية إذا فقط إذا حققت الشرط : (d.c.c) .

< أمثلة >

1 - كل حقل هو حلقة آرتينية .

2 - كل حلقة منتهية هي حلقة آرتينية .

3 - $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .. حلقة نيوثرية ، بينما ليست آرتينية .. لأن :

$\forall x \in \mathbb{Z}/\{0\}$ و $\langle x \rangle \supseteq \langle x^2 \rangle \supseteq \langle x^3 \rangle \supseteq \dots$

« لن تنقطع » .

6-1-2 : مبرهنة :

- لتكن R حلقة تبديلية و $I \trianglelefteq R$ .. عندئذٍ :

إذا كانت R آرتينية $\Leftarrow$ R/I آرتينية .

« الإثبات » .

- لتكن : .... $I_1/I \supseteq I_2/I \supseteq$ سلسلة متناقصة من المثاليات في R/I ..

إن : $\varphi : R \to$ (تشاكل الغمر القانوني)

يحقق أن :

$$\pi^{-1}(I_1/I) \supseteq \pi^{-1}(I_2/I) \supseteq \dots$$

$$\Rightarrow I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

سلسلة متناقصة من المثاليات في R.

(لكن R آرتينية) عندئذٍ فإن:

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n ; I_n = I_i \Rightarrow$

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n ; I_n/I = I_i/I \Rightarrow$

R/I آرتينية .. #

* سؤال:

- لتكن: $R \leq$ ح' و R نيوثرية ..
فهل هذا يقتضي أن ح' حلقة نيوثرية ؟

- لتكن: $R \leq$ ح' و R آرتينية ..
فهل هذا يقتضي أن ح' حلقة آرتينية ؟

#

« انتهت محاضرات مقرر البنى الجبرية (2) »

Magd-Mira