طريقة العناصر المنتهية

تعتمد طريقة العناصر المنتهية على تقسيم المنطقة المدروسة إلى مناطق صغيرة منتهية تغطي المنطقة كلها.

تدعو هذه المناطق بالعناصر المنتهية، وتدعو نقاط اتصال هذه العناصر بالعُقَد.

finite elements — nodes

ثم نقوم بالتقريب على كل من هذه المناطق وتجميع المعادلات الناتجة في جملة شاملة واحدة.

- إذا كانت العناصر ذات بعد واحد فتكون عبارة عن قطع مستقيمة ويكون لكل عنصر عقدتين.

أما إذا كانا ندرس في فضاء ثنائي البعد فيتم اختيار العناصر على أنها مثلثات أو مربعات أو ...

وتكون رؤوس هذه المضلعات هي العقد.

وهكذا ...

ملاحظة: المقصود بالقيم العقدية قيم التابع عند العقد وليس قيم تحليلية كما في التحليل العقدي!

- هناك طريقتين هامتين لصيغ العناصر المنتهية:
  1) طريقة غالركين.
  2) طريقة صيغ التغير

1.1 ماهي طريقة العناصر المنتهية FEM ؟

طريقة العناصر المنتهية هي تقنية عددية لحل المسائل التي توصف بمعادلات تفاضلية جزئية أو يمكن صياغتها كتصغير دالي.
يتم تمثيل منطقة الاهتمام كتركيب لعناصر منتهية.
يتم تحديد دوال التقريب في العناصر المنتهية بدلالة قيم عقدية للحقل الفيزيائي الذي هو مجال البحث.
يتم تحويل مسألة فيزيائية مستمرة إلى مسألة عناصر فيزيائية مقطعة بقيم عقدية للمجهول.
في مسألة فطية يجب حل جملة معادلات جبرية خطية.
يمكن تقطية القيم داخل العناصر المنتهية باستخدام القيم العقدية.
(الجمل السابقة كلها مبنية للمجهول في النوطة)

ميزتان هامتان للـ FEM قيمتان ليتم ذكرهما:
1) التقريب القطعي للحقول الفيزيائية بالعناصر المنتهية يزود بدقة جيدة حتى مع دوال تقريب بسيطة (بزيادة عدد العناصر يمكن تحقيق أية دقة)
2) محلية التقريب تقود إلى جملة معادلات تتألف عليها الأصفار للمسألة المقطعة. هذا يساعد على حل المسائل مع عدد كبير جداً من المجاهيل العقدية.

2.1 كيف تعمل طريقة العناصر المنتهية FEM ؟

لتلخيص كيفية عمل طريقة العناصر المنتهية بعبارات عامة نكتب قائمة بالخطوات الرئيسية لإجراء حل العناصر المنتهية في الأسفل.

1) تقطيع الاستمرار:
الخطوة الأولى هي تقسيم منطقة الحل إلى عناصر منتهية.
يتم توليد شبكة العناصر المنتهية بشكل نموذجي من خلال برنامج معالجة أولية.
يتألف وصف الشبكة من عدة متجهات، والتي هي بشكل رئيسي إحداثيات العقد واتصالات العناصر.

2) اختيار دوال الاستيفاء:
يتم استخدام دوال الاستيفاء لاستيفاء متغيرات الحقل على العنصر.
غالباً، يتم اختيار الحدوديات لاستيفاء الدوال.
تعتمد درجة الحدودية على عدد العقد المعينة بالعنصر.

3) إيجاد خصائص العنصر:
يجب أن يتم إنشاء المادلة المصفوفية للعنصر المنزي بحيث تصل القيم العقدية للدالة المجهولة بالوسطاء الأخرى.
من أجل هذه المهمة يمكن استخدام العديد من الطرق المختلفة، الأكثر ملاءمة هي: طريقة التغير، وطريقة غالاركين.

4) تجميع معادلات العناصر:
لإيجاد جملة المعادلات الشاملة لكامل منطقة الحل يجب تجميع كل معادلات العناصر.
بعبارة أخرى، يجب دمج معادلات العناصر المحلية لكل العناصر المتعددة للتقطيع.
يتم استخدام اتصالات العناصر لعملية التجميع.
قبل الحل، يجب أن تؤخذ الشروط الحدية (التي لم تحسب ما يأتي معادلات العناصر) بعين الاعتبار.

5) حل جملة المعادلات الشاملة:
إن جملة المعادلات الشاملة للعناصر المنزية تغلب عليها الأصفار، متناظرة، ومعرفة موجبة بشكل نموذجي.
يمكن استخدام الطرق المباشرة والتكرارية للحل.
ستتبع القيم العقدية للدالة المدروسة كنتيجة للحل.

6) حساب نتائج إضافية:
في العديد من الحالات نحتاج لحساب وسطاء إضافية.
(تتمة الجملة غير مطلوبة).

over

3.1 صيغ معادلات العناصر المنتهية:

يمكن استخدام عدة طرق لتحويل الصيغة الفيزيائية للمسألة إلى تقطيع العناصر المنتهية المشابه.
إذا كانت الصيغة الفيزيائية للمسألة معروفة كمعادلة تفاضلية فإن أشهر طريقة لصيغة العناصر المنتهية لها هي طريقة غالركين.
إذا كان من الممكن صياغة المسألة الفيزيائية كتصغير لدالة، عندئذ يستخدم عادة صيغ التغير لمعادلات العناصر المنتهية.

طريقة غالركين:

لنأخذ مثالاً من بعد واحد لشرح صيغة العناصر المنتهية باستخدام طريقة غالركين.
لنفرض أننا نتابع لحل المعادلة التفاضلية التالية عددياً: σ_3
سوف نحل المسألة باستخدام عنصرين منتهيين خطيين ذوي بعد واحد كما هو موضح بالشكل.

(تمت الحل مشروحة ولاتهم تفاصيل خطواتها كثيراً)
shape functions دوال الشكل.

ترجمة الفقرة الأخيرة من طريقة غالركين:
إن الحل الفعلي هو دالة تربيعية.
حل العناصر المنتهية باستخدام العناصر المنتهية هو خطي وتقريباً.
يمكن الحصول على حل عناصر منتهية أكثر دقة بزيادة عدد العناصر البسيطة أو باستخدام عناصر ذات دوال شكل أكثر تعقيداً.
من القيم ملاحظة أن طريقة العناصر المنتهية تزود بقيم فعلية لـ u عند العقد (فقط في هذه المسألة المحددة)
العناصر المنتهية بدوال شكل خطية تعطي قيماً عقدية فعلية إذا كان الحل الدقيق تربيعياً.
العناصر التربيعية تعطي قيماً عقدية فعلية للحل التكعيبي.
وهكذا...