2015 / 3 / 12 المحاضرة الثانية

$$(3x-5)^5 y'' + (3x-5)^4 y' + (3x-5)^3 y = 0$$

$$y'' + \frac{(3x-5)^4}{(3x-5)^5} y' + \frac{(3x-5)^3}{(3x-5)^5} y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{(3x-5)} y' + \frac{1}{(3x-5)^2} y = 0$$

نقطة شاذة $\boxed{x = \frac{5}{3}}$

$$(x-x_0)P = \left(x - \frac{5}{3}\right)\frac{1}{3x-5} = \frac{1}{3}\,\frac{3x-5}{3x-5} = \frac{1}{3}$$ تحليلي عند $x = \frac{5}{3}$

$$(x-x_0)^2 q = \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 \frac{1}{(3x-5)^2} = \frac{1}{9}\,(3x-5)^2 \frac{1}{(3x-5)^2} = \frac{1}{9}$$

وهو تحليلي ومنه $x = \frac{5}{3}$ شاذة نظامية

$$(2x^2-4x)^3 y'' + x(2x^2-4x) y' + (2x^2-4x)^3 y = 0$$

$$y'' + \frac{x(2x^2-4x)}{(2x^2-4x)^3} y' + \frac{(2x^2-4x)^3}{(2x^2-4x)^3} y = 0$$

$$y'' + \frac{x}{(2x^2-4x)^2} y' + y = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0,\quad x = 2$$

ندرس وضع كل نقطة على حدى

$\boxed{x=0}$: $(x-x_0)P = x \dfrac{x}{(2x^2-4x)^2}$

$$= \frac{x^2}{4x^2(x-2)^2} = \frac{1}{4(x-2)^2}$$

وهو تحليلي عند النقطة $x=0$ ومنه $x=0$ نقطة شاذة نظامية

$\boxed{x=2}$: $(x-x_0)P = (x-2)\dfrac{x}{(2x^2-4x)^2}$

$$= (x-2)\frac{x}{4x^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{4x(x-2)}$$ غير تحليلي

ومنه $x=2$ نقطة شاذة غير نظامية

* حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية بأمثال متغيرة في جوار النقطة x_0:

* نظرية ~~الوحدانية~~ الوجود الوحدانية

إذا كانت الدالتان $q(x)$ و $P(x)$ تحليليتان في المعادلة التفاضلية

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \quad ---- (1)$$

في النقطة x_0 وأن نشرهما بسلسلة تايلور في قوى $x-x_0$

تتقاربان في المجال $|x-x_0|<R$

فهناك حلان مستقلان للمعادلة (1) كل منهما على شكل سلسلة

تايلور في قوى $x-x_0$ متقاربة في مجال ضمن المجال R

- ايجاد الحل العام في جوار النقطة x_0 :

1. نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية على شكل متسلسلة قوى لـ $x - x_0$

2. نوجد المشتقة الأولى والثاني بشكل الحد العام ثم نعوض بالمعادلة التفاضلية

3. نوحد ~~xxxx~~ قوى المتسلسلات الناتجة

4. نوحد الحدود الدنيا للمتسلسلات الناتجة

5. بالمطابقة نجد علاقة تكرارية للحل العام

6. نحسب جميع الثوابت بدلالة c_0, c_1 وباخراج c_0 عامل مشترك واخراج c_1 عامل مشترك نحصل على الحل الخاص "الحلين الخاصين"

7. يكون الحل العام هو التركيب الخطي للحلين الخاصين أي يكون من الشكل

$y = c_0$ (الحل الخاص الأول) $+ c_1$ (الحل الخاص الثاني)

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بجوار $x_0 = 0$

$$y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$$

قانون : $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots$$

$$y'' = 2c_2 + 2.3 c_3 x + \cdots + n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة نجد

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n)(n-1) C_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} + (x^2+2) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

نبدل كل n بـ $n+2$ نبدل كل n بـ $n-2$

نوحد الأسس

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n =$$

نفك حدين لانه نفك حد واحد نفك حد بالدرج $n=2$

نجعل حدود $\sum$ متساوية وذلك بفك الحدود بالتدريج

ثم نسحب $\sum_{n=2}^{\infty}$ عامل مشترك و x^n أيضاً وبذلك نحصل على:

$$(2)(1) C_2 + (3)(2) C_3 x + (1) C_1 x + 2C_0 + 2C_1 x +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) C_{n+2} + n C_n + C_{n-2} + 2C_n \right] x^n = 0$$

$$2C_2 + 6C_3 x + C_1 x + 2C_0 + 2C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [\ldots\ldots] x^n = 0$$

بالمطابقة نجد

$$2C_2 + 2C_0 = 0 \Longrightarrow C_2 = -C_0$$

$$(6C_3 + C_1 + 2C_1) = 0$$

$$6C_3 + 3C_1 = 0 \Longrightarrow C_3 = \frac{-1}{2} C_2$$

$$(n+1)(n+2) C_{n+2} + C_{n-2} + (n+2) C_n = 0$$

نعزل الأعلى رتبة $\quad C_{n+2} = \dfrac{(n+2)C_n + C_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \quad ; \quad n \geq 2$ حسب $\sum$

علاقة تكرارية للحل العام

$$n = 2 \implies C_4 = \frac{+4 C_2 + C_0}{3 \cdot 4} = \frac{-4 C_0 + C_0}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{3} C_0}{\cancel{3} \cdot 4}$$

$$C_4 = \frac{C_0}{4}$$

$$n = 3 \implies C_5 = \frac{5 C_3 + C_1}{4 \cdot 5}$$

$$= \frac{-5\left(\frac{-C_1}{2} + C_1\right)}{4 \cdot 5} = \frac{3 C_1}{40} = C_5$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

$$y = C_0 + C_1 x - C_0 x^2 - \frac{C_1}{2} x^3 + \frac{C_0}{4} x^4 + \frac{3 C_1}{40} x^5 + \dots$$

$$= C_0 \underbrace{\left(1 - x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \dots\right)}_{\text{حل خاص أول}} + C_1 \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{40} + \dots\right)}_{\text{حل خاص ثاني}}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية في جوار النقطة $x_0 = 0$

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

تحليلي ، $(x-x_0)P(x) = x \cdot \frac{-x}{x-1}$; $x=0$

تحليلي ، $(x-x_0)^2 q(x) = x^2 \cdot \frac{(+1)}{x-1}$;

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

التكملة في المحاضرة القادمة

أستاذة المحاضرة