المحاضرة الثالثة والعشرون والأخيرة :

الزمر القابلة للحل:

• تعريف :

. لتكن : G زمرة و : $a, b \in G$ نسمي العنصر : $a.b.a^{-1}.b^{-1}$ مبادل العنصرين a ، b ونرمز له : $[a,b] = a.b.a^{-1}.b^{-1}$

. إن المجموعة : $S = \{[a,b] ; a, b \in G\}$ لا تشكل زمرة جزئية بالحالة العامة.

• تعريف : لتكن : G زمرة ولتكن : $S = \{[a,b] ; a, b \in G\}$ نسمي الزمرة الجزئية : $G' = < S >$ بالمشتق الأول للزمرة G.

إذا كانت G زمرة تبديلية فإن : $G' = <e>$

وبشكل مشابه لنأخذ المجموعة : $S' = \{[a,b] ; a, b \in G'\}$ ولنأخذ الزمرة الجزئية : $G'' = < S' >$ نسمي الزمرة : G'' المشتق الثاني للزمرة G (المشتق الأول للزمرة G') وهكذا لأجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$.

لنفرض أنه تم الحصول على الزمرة : $G^{(n)}$ والتي هي : $G^{(n)} = < S^{(n-1)} >$ حيث : $S^{(n-1)} = \{[a,b] ; a, b \in G^{(n-1)}\}$ حيث نسمي الزمرة : $G^{(n)}$ المشتق من المرتبة n للزمرة G أو المشتق الأول للزمرة : $G^{(n-1)}$ ، بنفس الطريقة نحاول الحصول على : $G^{(n+1)}$

• تعريف : نقول عن الزمرة G إنها قابلة للحل إذا وُجِدَ عدد صحيح موجب n : لأجله يكون : $G^{(n)} = <e>$

ومثال على ذلك : كل الزمر التبديلية هي زمر قابلة للحل.

مبرهنة : لتكن : G زمرة عندئذٍ : 1). الزمرة الجزئية G' مميزة في G.

2). الزمرة الجزئية G' ناظمية في G.

3). زمرة الخارج G / G' تبديلية.

البرهان:

1). لنبرهن أنه أياً كان: $f \in Aut(G)$ فإن: $f(G') = G'$

لنبرهن أولاً أن: $f(S) = S$ بحيث: $S = \{[a,b] ; a,b \in G\}$

(مجموعة كل المبادلات للزمرة G).

$\forall\, a.b.a^{-1}.b^{-1} \in S$:

$$f(a.b.a^{-1}.b^{-1}) = f(a).f(b).f(a^{-1}).f(b^{-1})$$
$$= \underbrace{f(a).f(b)}_{\in G}.(f(a))^{-1}.(f(b))^{-1} \in S$$

ومنه نجد أنّ: $f(S) \subseteq S$

وبما أنّ: $f^{-1}(S) \subseteq S$ فإنّ: $f(f^{-1}(S)) \subseteq f(S)$ أي:

$S \subseteq f(S)$ ومنه: $S = f(S)$

. ليكن: $y \in G'$ عندئذٍ:

$$y = a_{i1}^{si1} . a_{i2}^{si2} . \cdots\cdots . a_{it}^{sit}$$

. حيث: $a_{ij} \in S, s_{ij} \in \mathbb{Z}$ ، $j = 1 \to t$

$$f(y) = f(a_{i1}^{si1} . a_{i2}^{si2} . \cdots\cdots . a_{it}^{sit})$$
$$= f(a_{i1}^{si1}).f(a_{i2}^{si2}) \cdots\cdots f(a_{it}^{sit})$$
$$= f(a_{i1})^{si1}.f(a_{i2})^{si2}. \cdots\cdots .f(a_{it})^{sit} \in G'$$

ومنه نجد أنّ: $f(G') \subseteq G'$

وأيضاً: $f^{-1}(G') \subseteq f(G')$

ومنه: $G' \subseteq f(G')$

وبذلك يكون: $f(G') = G'$

2). حسب (1) حيث كل زمرة جزئية مميزة تكون ناظمية.

3). ليكن: $x,y \in G$ عندئذ: $x.y.x^{-1}.y^{-1} \in S \subseteq G$

$$(x.y.x^{-1}.y^{-1}).G' = G' \Rightarrow (x.G').(y.G')(x^{-1}.G').(y^{-1}G') = G'$$

$$\Rightarrow (x.G').(y.G')(x.G')^{-1}.(y.G')^{-1} = G'$$

ومنه:

$$(x.G').(y.G') = (y.G')(x.G')$$

وبالتالي: الزمرة G/G' تبديلية.

مبرهنة: لتكن: G زمرة ولتكن: H زمرة جزئية في G، الشروط التالية متكافئة:

1). الزمرة الجزئية H ناظمية في G وزمرة الخارج G/H تبديلية.

2). $G' \subseteq H$

الإثبات:

(($1 \Rightarrow 2$)):

لنفرض أن: H ناظمية في G وأن: G/H تبديلية.

لنبرهن أولاً أن: $S \subseteq H$، ليكن: $x.y.x^{-1}.y^{-1} \in S$

حيث: $x,y \in G$

$$(x.y.x^{-1}.y^{-1}).H = (x.H).(y.H).(x^{-1}.H).(y^{-1}.H)$$

$$= (x.H).(y.H).(x.H)^{-1}.(y.H)^{-1}$$

$$= (x.H).(x.H)^{-1}.(y.H).(y.H)^{-1}$$

لأن: G/H تبديلية.

$$= (x.x^{-1}.H).(y.y^{-1}.H) = H$$

أصبح لدينا: $(x.y.x^{-1}.y^{-1}).H = H$

ومنه: $x.y.x^{-1}.y^{-1} \in H$

وبذلك يكون: $S \subseteq H$

وبالتالي: $G' \subseteq S$

$2) \Rightarrow 1)$:

لنفرض أنّ: $G' \subseteq H$ ولنبرهن أنّ:

$$\forall g \in G : g.H.g^{-1} \subseteq H$$

$$z \in g.H.g^{-1} \Rightarrow z = g h_0 . g^{-1} \text{ ؛ } h_0 \in H$$

$$[g, h_0] = g h_0 . g^{-1} . h_0^{-1} \in G' \subseteq H$$

لنفرض أنّ:

$$[g, h_0] = h_1 \in H$$

$$z = g.h_0.g^{-1} = (g.h_0.g^{-1}.h_0^{-1}).h_0 = h_1.h_0 \in H$$

ومنه يكون: $g.H.g^{-1} \subseteq H$

وبالتالي الزمرة الجزئية: H ناظمية في G

$$\forall x, y \in G , x.y.x^{-1}.y^{-1} \in S \subseteq G' \subseteq H$$

$$(x.y.x^{-1}.y^{-1}) H = H$$

$$(x.H)(y.H).(x^{-1} H).(y^{-1}.H) = H$$

$$(x.H)(y.H).(x.H)^{-1}.(y.H)^{-1} = H$$

$$\Rightarrow (x.H)(y.H) = (y.H)(x.H)$$

وبالتالي الزمرة: G / H تبديلية.

$\boxed{\frac{1}{302}}$. أثبت أنّ الزمرة التي مرتبتها: 175 تبديلية.

الحل:

• لتكن: G زمرة منتهية بحيث: $(G:1) = 175 = 5^2.7$ لدينا حسب مبرهنة سيلوف في G:

توجد: 5 - زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 ولتكن H

توجد: 7 - زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 7 ولتكن K

• عدد الـ 5 - زمر سيلوفية هو: $1 + 5K$

$K = 0 \Rightarrow 1 + 5K = 1$

$K = 1 \Rightarrow 1 + 5K = 6.$ (لا تقسم $(G:1)$)

$K = 2 \Rightarrow 1 + 5K = 11$ (لا تقسم $(G:1)$)

إذاً توجد زمرة سيلوفية وحيدة ومن ثمّ تكون ناظمية في G.

من جهة أخرى: الزمرة الجزئية H تحقق: $(H:1)=25=5^2$

حيث 5 أولي ومنه H تبديلية.

كذلك فإن الزمرة K التي مرتبتها 7 (عدد أولي) هي دوارة وبالتالي تبديلية، وبما أنّ الزمرة H ناظمية في G فإن: $H \cdot K$ زمرة جزئية في G تحقق: $(H \cdot K:1)=(H:1)(K:1)=175$

حيث: $gcd(25,7)=1$

لدينا: $H \cdot K \subseteq G$ ، $(H \cdot K:1)=(G:1)$ ومنه $H \cdot K$ التبديلية

تمرين: G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G، أثبت أنه إذا كانت G دوارة فإنّ G/H دوارة.

الحل:

1). لنفرض أنّ: $G=\langle a \rangle$ بحيث: $a \in G$ عندئذٍ: G/H

معرفة لأنّ: H ناظمية في G.

ولنبرهن أن: $\boxed{G/H=\langle aH \rangle}$

$$a \cdot H \in G/H \Rightarrow \{\langle a \cdot H \rangle \subseteq G/H\}$$

. ليكن: $b \cdot H \in G/H$ بحيث: $b \in G$ ومنه: $b=a^n$ بحيث $n \in \mathbb{Z}$

لأنّ: G دوارة بالعنصر a.

$$b \cdot H = a^n \cdot H = (a \cdot H)^n \in \langle a \cdot H \rangle \Rightarrow \{G/H \subseteq \langle a \cdot H \rangle\}$$

ومن الـ متراجحتين: $\langle a \cdot H \rangle = G/H$

- انتهت المحاضرة الأخيرة -