١٠/١٢/٢٠١٥ المحاضرة الثانية

تمرين: إذا كان احتمال أن يصيب رام الهدف هو 0.8، فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 مرات ونرمز بـ X لعدد مرات إصابة الهدف والمطلوب:

أ- اكتب دالة احتمال X . ب- احسب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة فقط.

ج- احسب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر.

د- احسب احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل.

هـ- احسب احتمال إصابة الهدف

و- احسب القيمة المتوقعة لإصابة الهدف وانحرافه المعياري.

الحل: إن التسديد نحو الهدف هو تجربة برنولية لها نتيجتان نجاح (إصابة الهدف) وفشل (عدم إصابة الهدف) ووسيطها $\boxed{p=0.8}$ والتسديد نحو الهدف 5 مرات هو تكرار للتجربة البرنولية 5 مرات وبالتالي سيكون لـ X (عدد مرات إصابة الهدف) التوزيع الحداني بالوسيطين $n=5$ و $p=0.8$ أي أن:

أ- دالة احتمال X هي:

$$f_X(x) = C_x^n \, p^x q^{n-x}$$

$x = 0, 1, 2, \dots, 5$ (0 لا إصابة، (1) إصابة واحدة، ...، (5) 5 إصابات)

$$f_X(x) = C_x^5 (0.8)^x (0.2)^{5-x}$$

ب- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة فقط:

$$P(X=1) = f_X(1) = C_1^5 (0.8)^1 (0.2)^{5-1} = 5(0.8)(0.2)^4 = 0.0064$$

ج- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر:

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = C_0^5 p^0 q^{5-0} + 0.0064$$

$$= (0.2)^5 + 0.0064 = 0.00672$$

د- احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل:

$$P(X \ge 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

أو

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X<2)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - 0.00672 = 0.99328$$

هـ- احتمال إصابة الهدف:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.00032$$

$$= 0.99968$$

د- بما أنه لـ X التوزيع الحدانى فإن:

$$E(X) = n \cdot p = 5(0.8) = 4$$

$$Var(X) = npq = 5(0.8)(0.2) = 0.8$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.8} \approx 0.9$$

تمرين: يتضمن امتحان مئة سؤال من النوع متعدد الخيارات ولكل سؤال أربعة خيارات مقترحة، واحدمنها فقط صحيح.

أ- إذا خُصص لكل سؤال درجة واحدة، فما هي الدرجة المتوقعة لطالب يجيب معتمداً على الحزر (التخمين).

ب- إذا خُصص لكل إجابة خاطئة (1-) فكم يجب أن نخصص للإجابة الصحيحة حتى تكون الدرجة المتوقعة لطالب يجيب بالحزر (0) صفراً.

الحل أ- إذا رمزنا بـ X لعدد الإجابات الصحيحة، يكون لـ X التوزيع الحداني بالوسيطين $n = 100$ و $p = 1/4$ وبالتالي تكون الدرجة المتوقعة هي:

$$E(X) = 100(1/4) = 25 \text{ درجة}$$

ب- إذا خصصنا للإجابة الصحيحة الدرجة a وفرضنا أن المتغير $\boxed{X_i}$ يمثل درجة الطالب على السؤال رقم i حيث $i = 1, 2, \ldots, 100$ فنجد لـ X جدول التوزيع:

X_i	-1	a
$f_{X_i}(x)$	$3/4$	$1/4$

$; \; i = 1, 2, \ldots, 100$

فتكون درجة الطالب هي:

$$\sum_{i=1}^{100} X_i$$

والدرجة المتوقعة

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) \quad \text{(حسب خواص التوقع)}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{x} x f_{X_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^{100}\left(-\frac{3}{4} + \frac{a}{4}\right)$$

$$E(X) = n\left(-\frac{3}{4} + \frac{a}{4}\right) = -75 + 25a \; ; \; n = 100$$

فإذا كان $E(X) = 0$ فإن $-75 + 25a = 0$ وبالتالي $a = 3$

أي يجب أن نخصص للإجابة الصحيحة ثلاث درجات حتى تكون الدرجة المتوقعة صفراً لطالب يجيب بشكل عشوائي (بالتخمين).

مبرهنة: إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة حيث يكون لـ X_i التوزيع الحداني $X_i \sim b(n_i, p)$ و $i = 1, 2, \dots, n$ وكان $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ فإن المتغير العشوائي Y له التوزيع الحداني بالوسيطين $\sum_{i=1}^{n} n_i$ و p أي أن $Y \sim b(\sum_{i=1}^{n} n_i, p)$

تمرين: تُنتج إحدى شركات الأدوية لقاحاً لمعالجة السعال فإذا فرضنا أن نسبة اللقاحات الجيدة في الشركة هي 0.95 وإذا اخترنا $\boxed{15}$ لقاحاً من الإنتاج بطريقة عشوائية فما احتمال: أ- أن يكون $\boxed{3}$ لقاحات فاسدة.

ب- أن يكون $\boxed{3}$ لقاحات فاسدة على الأكثر.

ج- احسب القيمة المتوقعة والانحراف لاختيار لقاح فاسد.

الحل: لنعرف النجاح في هذه الحالة بأنه اختيار لقاح فاسد فيكون $p = 0.05$ و $q = 0.95$ ويكون $n = 15$ فإذا دل X على عدد اللقاحات الفاسدة فإن لـ X التوزيع الحداني $X \sim b(15, 0.05)$ ودالة الاحتمال له:

$$f_X(x) = C_x^{15} (0.05)^x (0.95)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, 15$$

أ- احتمال أن يكون ثلاثة لقاحات فاسدة:

$$p(X = 3) = f_X(3) = C_3^{15} (0.05)^3 (0.95)^{12} = 0.031$$

ب- احتمال أن يكون ثلاثة لقاحات فاسدة على الأكثر:

$$p(X \leq 3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$$

$$p(X \leq 3) = C_0^{15} p^0 q^{15} + C_1^{15} p q^{14} + C_2^{15} p^2 q^{13} + C_3^{15} p^3 q^{12}$$

$$= 0.463 + 0.366 + 0.135 + 0.031 = 0.995$$

ج- حساب القيمة المتوقعة والانحراف لاختيار لقاح فاسد

$$E(X) = np = 15(0.05) = 0.75$$

$$Var(X) = npq = 15(0.05)(0.95) = 0.7125$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \approx 0.84$$

تمرين:

يجري تفتيش الشحنات الكبيرة من البضاعة القادمة إلى مؤسسة صناعية بطريقة العينة، لنفرض أن هذه الطريقة تتلخص باختيار $\boxed{15}$ قطعة عشوائياً ثم اختبارها الواحدة تلو الأخرى، وترفض البضاعة إذا لاحظنا قطعتين مرفوضتين أو أكثر. فإذا احتوت بضاعة على 0.05 من القطع مرفوضة فما هو احتمال

أ- قبول البضاعة.

ب- رفض البضاعة.

الحل: لنعرف النجاح بأنه الحصول على قطعة مرفوضة فيكون $p=0.05$ و $q=0.95$ و $n=15$.

وليكن X يدل على عدد القطع المرفوضة فإن لـ X التوزيع الحداني

$$f_X(x) = C_x^{15}(0.05)^x(0.95)^{n-x} \quad ; \quad x=0,1,\dots,15$$

أ- احتمال قبول البضاعة:

$$\begin{aligned}
p(X \le 1) &= p(X=0) + p(X=1) \\
&= C_0^{15}(0.05)^0(0.95)^{15} + C_1^{15}(0.05)^1(0.95)^{14} \\
&= 0.463 + 0.366 = 0.829
\end{aligned}$$

ب- احتمال رفض البضاعة

$$\begin{aligned}
p(X \ge 2) &= 1 - p(X \le 1) \\
&= 1 - [p(X=0) + p(X=1)] \\
&= 1 - 0.829 \\
&= 0.171
\end{aligned}$$

انتهت المحاضرة الثانية