/ /

المحاضرة الثانية — الخميس 12/ 13/ 2015

- تعريف دالة التغير المحدود:

إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ ولتكن P تجزئة لـ $[a,b]$ اي $P \in P[a,b]$

بحيث $P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b : x_0 < x_1 \dots < x_n \}$

ولنعرف المقدار :
$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

$$V(f,P) = | f(x_1) - f(x_0) | + \dots + | f(x_n) - f(x_{n-1}) |$$

وليكن
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{P \in P[a,b]} V(f,P)$$

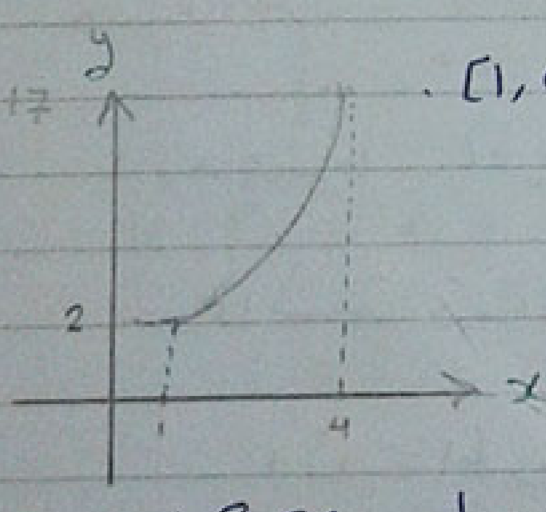
- إذا كانت $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$ عندئذٍ نقول بأن الدالة f ذات تغير محدد على $[a,b]$

بحيث أن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ هو التغير الكلي للدالة f على المجال $[a,b]$

مثال: إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[1,4]$ بالشكل التالي: $f(x) = x^2 + 1$

1- اوجد التغير الكلي لهذه الدالة .

2- استنتج ان الدالة ذات تغير محدود على المجال $[1,4]$.



الحل: $P = \{ x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 4 \}$

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

$$V(f,P) = | x_1^2 + 1 - 2 | + | x_2^2 + 1 - x_1^2 - 1 | + | x_3^2 + 1 - x_2^2 - 1 | + \dots$$

$=16$

$$\dots + | x_n^2 + 1 - x_{n-1}^2 - 1 | = x_1^2 - 1 + x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + \dots$$
$$\dots + 16 - x_{n-1}^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow \overset{4}{\underset{1}{V}}(f) = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,4]} \{15\} = 15$$

مثال (2) :

إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[0,1]$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} & x \neq 0 : x \in]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

① بين أن الدالة f مستمرة على المجال المغلق $[0,1]$ وأن الدالة f محدودة .

② بين أن الدالة f ليست ذات تغير محدود .

الحل : ① نأخذ $x_0 \in]0,1[$ ولنبرهن أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x \cos \frac{\pi}{2x} = x_0 \cos \frac{\pi}{2x_0} = f(x_0).$$

أي أن f مستمرة على المجال $]0,1[$.

وعندما $x_0 = 0$ لنبرهن أن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \cos \frac{\pi}{2x} = 0 = f(0) \quad \text{because} \begin{cases} \left|\cos \frac{\pi}{2x}\right| \leq 1 & \text{محدود} \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0 & \text{كمية تؤول للصفر} \end{cases}$$

وعندما $x_0 = 1$ نلاحظ أن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1)$

ومما سبق نجد أن الدالة f مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$.

- إثبات المحدودية : يجب أن نبرهن أنه :

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M , \forall x \in [0,1]$$

نلاحظ أن : $\left|\cos \frac{\pi}{2x}\right| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow |x\cos\frac{\pi}{2x}| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1 \quad , \forall x \in [0,1]$

وهذا يؤدي إلى أن الدالة f محدودة.

② لنختار تجزئة للمجال $[0,1]$ بحيث يكون من أجلها $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = +\infty$

لنختار إذاً التجزئة كما يلي:

$$P = \{ \underset{x_0}{0} < \underset{x_1}{\frac{1}{2n}} < \underset{x_2}{\frac{1}{2n-1}} < \dots < \underset{x_{n-2}}{\frac{1}{3}} < \underset{x_{n-1}}{\frac{1}{2}} < \underset{x_n}{1} \}$$

$$\Rightarrow V(f,P) = |f(\tfrac{1}{2n}) - f(0)| + |f(\tfrac{1}{2n-1}) - f(\tfrac{1}{2n})| + \dots$$

$$\dots + |f(\tfrac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{3})| + |f(1) - f(\tfrac{1}{2})|$$

نلاحظ:

- $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2n} = \frac{1}{2n}\cos n\pi$
- $f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{2n-1}\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}\pi = 0$

$$\Rightarrow V(f,P) = |\tfrac{1}{2n}\cos n\pi - 0| + |0 - \tfrac{1}{2n}\cos n\pi| + \dots$$

$$\dots + |\tfrac{1}{2}\cos\pi - 0| + |0 - \tfrac{1}{2}\cos\pi| =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$

وبالتالي

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V(f,P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

ومنه فإن f دالة ليست ذات تغير محدود.

تمرين: أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة كما يلي (مع الرسم):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1-x & ; 0 < x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \end{cases}$$

ثم استنتج أن f دالة ذات تغير محدود.

انتهت المحاضرة...