التحليل العددي : **Numerical Analysis**

هو أحد فروع الرياضيات التطبيقية، يهتم بإيجاد الحلول التقريبية لمسائل ما وتقييم الخطأ أي جعل الخطأ أصغر ما يمكن.

* يختلف التحليل العددي عن التحليل الحقيقي بأن النتائج التي نحصل عليها في التحليل العددي تكون تقريبية على عكس التحليل الحقيقي الذي يعطينا نتائج دقيقة.
إذاً لماذا قد نرغب باستخدام التحليل العددي طالما أنه بالإمكان الحصول على نتائج دقيقة بطرق تحليلية؟

في الحقيقة لا تستطيع الطرق التحليلية حتى الآن حل جميع المسائل الرياضية على الرغم من حاجتنا الشديدة في جميع المجالات لحلها، فضلاً عن كون بعض الطرق التحليلية ذات كلفة باهظة، لذا نلجأ إلى التحليل العددي للحصول على حل تقريبي بحيث يكون الخطأ أصغر ما يمكن.

* ما هو الخطأ؟ توجد عدة أنواع للخطأ:
فالخطأ الفعلي **true error** هو الفرق بين الحل الفعلي والحل التقريبي.
وهناك ما يدعى بخطأ الاقتطاع **truncation error** حيث أن بعض الطرق تعتمد على نشر تايلور والذي هو عبارة عن سلسلة لانهائية، فللحصول على طريقة مقبولة نقوم باقتطاع السلسلة عند حد ما، ويترتب على ذلك خطأ ندعوه خطأ الاقتطاع.
- عادةً ما يتم تقدير **estimabe** الخطأ تراجعية، أي ينبغي أن يكون الخطأ أصغر أو يساوي مقداراً معيناً، ويختلف تقدير الخطأ حسب الطريقة المتبعة.

* من أساليب التحليل العددي : التقريب **Approximation** والاستيفاء **Interpolation**
فلو فرضنا أنه لدينا مجموعة من النقاط، ونريد إيجاد دالة تمر بهذه النقاط عندئذٍ:

الاستيفاء	التقريب
توجد محدودية	دالة (ليست بالضرورة محدودية)
تمر الدالة تماماً بجميع النقاط	الدالة قد لا تمر بجميع النقاط بل تقترب منها
توجد المحدودية ثم الخطأ	توجد الخطأ ثم الدالة

1.1 تقريب الفروق المنتهية : Finite Difference Approximation

هدفنا هو تقريب المؤثرات التفاضلية باستخدام مؤثرات الفروق المنتهية .
بشكل عام، سوف نفترض أن الدوال المدروسة ملساء ، ولكن يجب ملاحظة أنه في بعض المسائل قد لا تكون الدوال المدروسة ملساء .

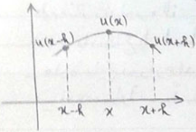
الدالة الملساء : هي دالة مستمرة ، ومشتقاتها حتى مرتبة ما موجودة ومستمرة .

المؤثر التفاضلي : هو مفهوم رياضي لا معنى له وحده ، مثل $d^n, d, \nabla, \nabla^2 ...$
ولكن عند تطبيقه على دالة ما ، فإنه يؤثر عليها للحصول على شكل من أشكال تفاضل (تغير) الدالة .

- إن مؤثرات الفروق المنتهية هي D_+ , D_- , D_0 ، وهي التي يعتمد عليها تقريب المعادلات التفاضلية (العادية ، والجزئية) بشكل أساسي .

نعلم أن الاشتقاق هو تغير (تفاضل) الدالة مقسوماً على تغير متغير هذه الدالة ،
وكذلك فإن مؤثرات الفروق المنتهية تعطي نفس المفهوم ولكن بطرق مختلفة .

حيث أن الفرق التقدمي Forward difference
هو الفرق بين القيمة الحالية والقيمة التي بعدها مقسوماً على h ، وهذا معنى التقدمي .



أما الفرق التراجعي Backward difference
فهو الفرق بين القيمة الحالية والقيمة التي قبلها مقسوماً على h ، وهذا معنى التراجعي .

أما الفرق المركزي Centered difference
فهو الفرق بين القيمة التي بعد القيمة الحالية والقيمة التي قبلها مقسوماً على $2h$
وهذا هو معنى المركزي .

(تحليل عددي ٢)
2.1 الطرق العددية الأساسية للمعادلات التفاضلية العادية:

تتركز الطرق الأساسية لتقسيم خوارزمية عددية على مسادية الحل
حيث تعتمد تقنيات الاستيفاء العددي، التكامل العددي، أو تقريب الفروقات المنتهية.
(في حال اعتمدنا تقريب الفروقات المنتهية سينتج لدينا ما يلي:
- الفرق الأمامي ⟸ طريقة أولر التقدمية (طريقة وحيدة الخطوة).
- الفرق التراجعي ⟸ طريقة أولر التراجعية (طريقة وحيدة الخطوة)
- الفرق المركزي ⟸ طريقة نقطة المنتصف Leapfrog (طريقة ثنائية الخطوة).

وكل الطرق السابقة هي طرق ظاهرية. explicit

3.1 طرق رانج كوتا:

تعتمد على قواعد التكامل العددي (تحليل عددي 1)

تذكرة:

- نصف القطر الطيفي لمصفوفة مربعة: $\rho(A) = \max|\lambda|$

حيث λ هي القيم الذاتية للمصفوفة A، وهي عبارة عن حلول المعادلة:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

المصفوفة الواحدية.

- نظيم مصفوفة مربعة: هناك ثلاث دوال نظيم للمصفوفة:

نظيم الأسطر $$\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

نظيم الأعمدة $$\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

وهذا النظيم هو الأكثر استخداماً $$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

نصف القطر الطيفي.

$\boxed{4.1}$ معادلة الفروق الخطية:

① معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية:

ينتج لدينا معادلة من الدرجة الثانية، نوجد حلولها ρ_2, ρ_1 ونميز حالتين:

- $\rho_1 \neq \rho_2 \Leftarrow$ الحلان مستقلان وبقية الحلول تركيب خطي بدلالتهما.
- $\rho_1 = \rho_2 \Leftarrow$ نأخذ قيم متقاربة ونشتق أحدهما ثم نأخذ التركيب الخطي..

② معادلة الفروق المرتبة من المرتبة ٢.

ينتج لدينا حدودية من المرتبة ٢ نناقش جذورها ← بسيطة simple
← مضاعفة multiple

③ جملة معادلة الفروق الخطية:

إن المعادلة السابقة من المرتبة ٢ تكافئ جملة معادلات خطية من المرتبة الأولى.

$$A_0 y^{n+1} = A y^n$$

نأخذ $G = A_0^{-1} A$ المصفوفة الرئيسية fundamental matrix

نوجد القيم الذاتية لـ G ونناقش كونها ← مختلفة distinct
← أو مضاعفة multiple

تعريف 1.4: تدعى المصفوفة الرئيسية G مستقرة إذا كانت G^n محدودة بتطبيق أي نظيم $\|.\|$ عليها ومن أجل أي n.

مبرهنة 2.4: تكون المصفوفة الرئيسية G مستقرة إذا وفقط إذا حققت قيمها الذاتية الشرط التالي ← إما $|\rho| = 1$ حيث ρ جذر بسيط.
← أو $|\rho| < 1$

④ جملة الفروق المرتبة الخطية غير المتجانسة.

5.1 تحليل الاستقرار Stability analysis

صفات الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية :

1) الطريقة المتماسكة : هي طريقة لا تؤثر فيها الأخطاء الصغيرة ، أما في الطريقة غير المتماسكة فإن خطأ صغيراً يؤدي إلى زعزعة الحل والوصول إلى نتائج غير صحيحة .

2) الطريقة المستقرة صفرياً : هي الطريقة التي يبقى فيها الحل محدوداً عندما $n \to \infty$.

3) الطريقة المتقاربة : هي الطريقة التي تؤدي إلى حل متقارب من الحل الفعلي للمسألة .

خاصية في المعادلات التفاضلية العادية . ص12 هامة

التقارب $\Leftrightarrow$ الاستقرار الصفري + التماسك

consistency + zero-stability $\Leftrightarrow$ convergency

تعريف 2.5 : نقول عن طريقة إنها مستقرة صفرياً إذا كان نصف القطر الطيفي للمصفوفة الموسعة $G(k)$ يحقق شرط فون نيومان :

$$r(\lambda k) \leq 1 + Ck$$

2.5.1 الاستقرار الحتمي : Absolute Stability

معنى ذلك هو إيجاد المنطقة التي تكون فيها الطريقة مستقرة ، وذلك حسب نصف القطر الطيفي ص13 منطقة الاستقرار .

طرق الفروق المنتهية للمعادلات المكانية الخطية

ما هي معادلة الحرارة؟

- هي معادلة تفاضلية جزئية لتابع $u(x,t)$ حيث أن t هو المتحول الزمني x هو المتحول المكاني، ويكون لها الشكل:

$$u_t = u_{xx}$$

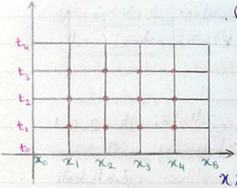
مشتق من المرتبة الأولى لـ t

مشتق من المرتبة الثانية لـ x

وهذه المعادلة هي إحدى أنواع المعادلات المكانية الخطية.

- مهمتنا هي إيجاد التابع u ، ولكن نوجده بطرق عددية عند نقاط معينة وليس بشكل عام.

يتم اعتماد طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من أجل حل هذه المسألة (تقريب الفروق التقدمي، والتراجعي، والمركزي).



- يتم تقسيم المنطقة التي تتم دراسة قيم التابع فيها إلى شبكة mesh تبعاً لما يلي:

$h = \Delta x$ القياس المكاني للشبكة (وهو ثابت)

$k = \Delta t$ القياس الزماني للشبكة (وهو ثابت)

عندئذٍ سنحصل على القيم: $x_j = jh \; ; \; j \in Z$

$t^n = nk \; ; \; n \geq 0$

إن النقاط التي نرغب بإيجاد قيم التابع عندها هي النقاط الداخلية لتقاطعات الشبكة أما النقاط الواقعة على المحيط فتدعى النقاط الحدية، حيث أن هذه النقاط يمكن اعتبارها قيماً ابتدائية، وتعطى هذه القيم من خلال ما يسمى بالشروط الحدية boundary Condition

1) شروط ديرخليه الحدية: تعطي قيم التابع عند الحدود. ص26

2) شروط نيومان الحدية: تعطي قيم مشتق التابع عند الحدود

ـ سنرمز بـ $u(x_j , t^n) = u_j^n$ للحل الفعلي عند النقطة (x_j , t^n)
وسنرمز بـ U_j^n للحل التقريبي الذي سنقرب بها القيمة u_j^n

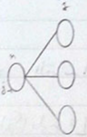
* يُدعى التقطيع السابق للشبكة بتقطيع لابلاس ص28

ـ لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية: $u_t = u_{xx}$
نقوم بتقريب كل من الطرفين على حدة باستخدام تقريب فروق منتهية ما
ـ من أجل الطرف الأيمن spatial discretization ص14
أبسط شيء هو استخدام تقريب الفروق المنتهية المركزي لـ u_{xx} .
ـ أما للطرف الأيسر temporal discretization ص15
فيمكن استخدام إحدى عدة طرق حل عددية للـ ODE .

بعد التعويض بذلك سنحصل على معادلة من شكل ما، حيث تم تمثيل هذه المعادلات بمخطط يدعى مخطط ستينلس، حيث أنه لحساب قيمة التابع u عند نقطة ما بشكل تقريبي يجب أن نعتمد على قيم هذا التابع عند ثلاث نقاط مجاورة كما يلي:

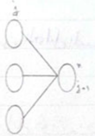
للفرق المكاني:

تراجعية



$U_{j-1}^n = \alpha U_j^{n-1} + \beta U_j^n + \gamma U_j^{n+1}$

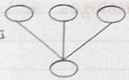
تقدمية



$U_{j+1}^n = \alpha U_j^{n-1} + \beta U_j^n + \gamma U_j^{n+1}$

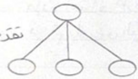
للفرق الزماني:

تراجعية



$U_j^{n-1} = \alpha U_{j-1}^n + \beta U_j^n + \gamma U_{j+1}^n$

تقدمية



$U_j^{n+1} = \alpha U_{j-1}^n + \beta U_j^n + \gamma U_{j+1}^n$

/ /

2.2.2 الاستقرار والتقارب في حال استخدام طريقة أولر التقدمية :

متى يتقارب الحل العددي إلى الحل الفعلي عندما $h, k \longrightarrow 0$
أي متى يسعى الخطأ نحو الصفر ؟ .

ص 16 **تعريف 3.2** : نقول عن طريقة فروق منتهية إنها متماسكة إذا حقق خطأ الاقتطاع المحلي ما يلي : $\|\tau_{h,k}\| \longrightarrow 0 \ ; \ h,k \longrightarrow 0$

ص 17 **تعريف 4.2** : نقول عن طريقة فروق منتهية ممثلة بالجملة $U^{n+1} = G_{hk}(U^n)$ إنها مستقرة بالنسبة لنظيم ما $\|.\|$ في منطقة $(h,k) \in R$ إذا حقق :
$$\|G_{hk}^n U\| \leq \|U\|$$
من أجل كل n حيث nk مثبتة .
(راجع ص 7 حيث أن طريقة الفروق المنتهية يمكن تمثيلها بجملة معادلات) .

تعريف 5.2 : نقول عن طريقة فروق منتهية إنها متقاربة إذا حقق الخطأ الفعلي ما يلي : $\|e_{h,k}\| \longrightarrow 0 \ , \ h,k \longrightarrow 0$

* من التحليل السابق نجد أن :
التقارب . $\Longleftarrow$ التماسك + الاستقرار

3.2 تحليل فون - نومان للاستقرار في الفضاء التكاملي L^2 :

في هذه الفقرة تم الاعتماد على تحويلات فورييه وطريقة الطاقة لدراسة استقرار طريقة فروق منتهية ما .
وإن اعتماد طريقة فورييه لها عدة ميزات advantages تم ذكرها .
ثم تم تلخيص النتيجة بالنظرية 6.3