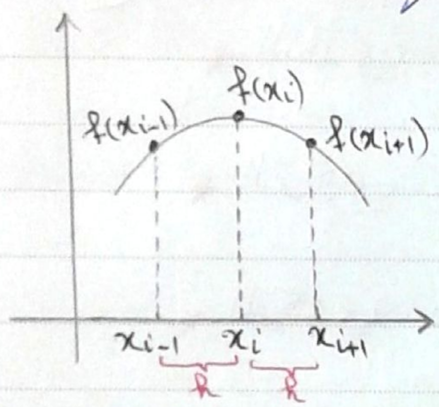
حلول عددية

المحاضرة الثانية

١٢/٣/٢٠١٥

تذكرة: (الدالة ذات متغير واحد).

نعلم أن الاشتقاق هو تغيّر (تفاضل) الدالة مقسوماً على تغيّر متغيّر هذه الدالة، وهو يعبّر عن ميل المماس في النقاط التي تمرّ منها الدالة، وهناك عدّة أشكال للتعبير عن ذلك:



1) **الشكل التقدمي:** ويعني إيجاد قيمة مشتق الدالة عند نقطة ما اعتماداً على قيمتي الدالة عند النقطة نفسها والنقطة التي تليها:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

مرتبة الخطأ

2) **الشكل التراجعي:** ويعني إيجاد قيمة مشتق الدالة عند نقطة ما اعتماداً على قيمتي الدالة عند النقطة نفسها والنقطة التي تليها:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

3) **الشكل المركزي:** ويعني إيجاد قيمة مشتق الدالة عند نقطة ما اعتماداً على قيمتي الدالة عند النقطة السابقة والنقطة التالية:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

* وتوجد صيغة مهمة للشكل المركزي للمشتق الثاني:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

_ نلاحظ أن مرتبة الخطأ في الطريقة المركزية أصغر من مرتبة الخطأ في الطريقتين التقدمية والتراجعية (كون $0<h<1 \Leftarrow h^2<h$) ولذلك نحبّذ اختيار الطريقة المركزية بشكل عام.

تذكرة: عندما نقول عن تابع f إنه يساوي للمقدار $f = O(h^n)$
فهذا يعني أن المقدار $\frac{f}{h^n}$ يسعى إلى الصفر (لا متناهي في الصغر) عندما $h \to 0$

قوانين الفروق المنتهية: (الدالة ذات متغيرين)

تعتمد طريقة الفروق المنتهية على تبديل كل مشتق من المشتقات الجزئية في المعادلة التفاضلية الجزئية بما يناسبها من قوانين الفروق (التقدمية - التراجعية - المركزية) والتي تكون كما يلي تبعاً للمتغير الذي نقوم بالاشتقاق بالنسبة إليه

1) الاشتقاق بالنسبة للمتغير الزماني t:

* التقدمي:
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}$$

* التراجعي:
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}$$

* المركزي:
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k}$$

* المركزي للمشتق من المرتبة الثانية:
$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2}$$

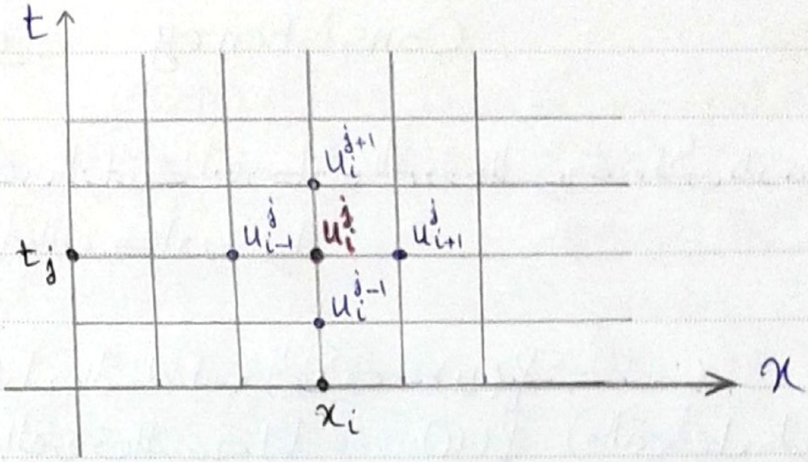
2) الاشتقاق بالنسبة للمتغير المكاني x:

* التقدمي:
$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}$$

* التراجعي:
$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}$$

* المركزي:
$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}$$

* المركزي للمشتق من المرتبة الثانية:
$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$



* قام كلٌّ من العلماء باختيار طرق معينة من الطرق السابقة (التقدمية - التراجعية - المركزية) واستبدلها بالمشتقات الجزئية في المعادلة التفاضلية الجزئية.

بهذه العملية نحصل على ما يسمى "معادلة الفروق المنتهية" وهي معادلة بسيطة بدلالة قيم u وليس بدلالة مشتقاتها.

فمثلاً: في معادلة الحرارة: $u_t = u_{xx}$

من الممكن استبدال u_t بقانون الفروق التقدمية، و u_{xx} بقانون الفروق المركزية ثمّ متابعة حل معادلة الفروق المنتهية الناتجة ضمن خوارزمية معينة.

ولكن ليست كل الاستبدالات والخوارزميات صحيحة، إذ ينبغي تقييم الخوارزمية الموضوعة إن كانت صحيحة ومقبولة أم لا، ويتم ذلك وفق ثلاثة معايير:
التماسك - الاستقرار - التقارب.

وسنتعرّف إلى كلٍّ من هذه المفاهيم بشكلٍ نظريٍّ مبدئياً، ثم ندرس كل من هذه المعايير للطرق والخوارزميات التي سنتناولها في هذا المقرر.

/ /

1 التماسك : Consistency

وهو من الخصائص الهامّة لتقريبات الفروق المنتهية، ولكنّ هذه الخاصّة غير كافية وحدها لقبول الخوارزمية أو رفضها.

* لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية $f(u)$
ولتكن معادلة الفروق المنتهية لها $\tilde{f}(u)$ (والتي نحصل عليها من خلال طريقة فروق ما)

ليس من الضروري أن تسعى دوماً تقريبات الفروق المنتهية التي اخترناها إلى الحلّ الصحيح للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، وذلك عندما $h,k \to 0$ (أي عندما تسعى تباعدات الفروق الزمانية والمكانية في الشبكة إلى الصفر).
في هذه الحالة ندعو الجملة (طريقة الفروق المنتهية) بأنها غير متماسكة.

تعريف: نقول عن الجملة إنها متماسكة مع المعادلة التفاضلية الجزئية إذا تحقق ما يلي:

$$[f(u)-\tilde{f}(u)] \xrightarrow[h,k\to 0]{} 0$$

وهذا التعريف يكافئ أن يكون خطأ الاقتطاع عند كلّ النقاط يسعى إلى الصفر عندما $h,k \to 0$، حيث يُعرّف خطأ الاقتطاع $\tau_{ij}(v)$ في النقطة (x_i, t_j) كالتالي:

$$\tau_{ij}(v) = F_{ij}(v) - \tilde{F}_{ij}(v)$$

أي يمكن أن نُعرّف التماسك أيضاً كما يلي:
{ نقول عن الجملة إنها متماسكة إذا كان: $\tau_{ij} \xrightarrow[h,k\to 0]{} 0$ في كل النقاط }

ويمكن استخدام أي من التعريفين السابقين المتكافئين لإثبات تماسك طريقة ما حسب المعطيات.

ملاحظة:

إذا كانت الجملة متماسكة عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$f(u) - \tilde{f}(u) = O(k^p) + O(h^q)$$

حيث $p, q \in \mathbb{N}^*$

ونقول عندئذ إن دقة الطريقة (مرتبة الخطأ) من المرتبة (p, q)

وهذا يعني أننا أخذنا الفرق بين الحل الفعلي وحل طريقة الفروق، والذي هو عبارة عن الخطأ، ثم نشترط أن يكون هذا الخطأ يسعى نحو الصفر من مرتبة ما حتى تكون الخوارزمية مقبولة.

تذكرة: (من أجل فهم المثال التالي)

* منشور تايلور لدالة في جوار نقطة x_0:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(h^{n+1})$$

* نعمم ذلك ليشمل دالة بمتغيرين وذلك عند تغيّر أحد هذين المتغيرين:

$$u(\underbrace{x_i + h}_{x_{i+1}}, t_j) = u(x_i, t_j) + h\, u_x(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_i, t_j) + \dots + O(h^{n+1})$$

$$u(x_i, \underbrace{t_j + k}_{t_{j+1}}) = u(x_i, t_j) + k\, u_t(x_i, t_j) + \frac{k^2}{2!} u_{tt}(x_i, t_j) + \dots + O(h^{n+1})$$

(المثال التالي يوضح معنى خطأ الاقتطاع، وكيف أن مرتبته تعتمد على المرتبة التي اقتطعنا سلسلة تايلور عندها)

/ /

مثال:

لتكن $f(u)=u_x+v.u_t$ حيث v ثابت

ولنفرض أننا سنأخذ معادلة الفرق التقدمي لكل من u_x, u_t عند نقطة ما (x_i, t_j) من الشبكة، عندئذ تتشكل لدينا معادلة الفروق المنتهية التالية:

$$\tilde{f}(u)=\frac{u_{i+1}^{j}-u_i^{j}}{h}+v\,\frac{u_i^{j+1}-u_i^{j}}{k}$$

حسب منشور تايلور حول نقاط الشبكة $(x=ih, t=jk)$ يكون لدينا:

$$\begin{cases} u_{i+1}^{j}=u_i^{j}+h\,u_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+o(h^3) \\ u_i^{j+1}=u_i^{j}+k\,u_t+\frac{k^2}{2}u_{tt}+o(k^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u_{i+1}^{j}-u_i^{j}}{h}=u_x+\frac{h}{2}u_{xx}+o(h^2) \\ \frac{u_i^{j+1}-u_i^{j}}{k}=u_t+\frac{k}{2}u_{tt}+o(k^2) \end{cases}$$

نعوض في عبارة $\tilde{f}(u)$ فينتج لدينا:

$$\tilde{f}(u)=u_x+\frac{h}{2}u_{xx}+o(h^2)+v u_t+\frac{vk}{2}u_{tt}+v\,o(k^2)$$

ومنه بطرح $\tilde{f}(u)$ من $f(u)$ يكون:

$$f(u)-\tilde{f}(u)=-\frac{h}{2}u_{xx}-\frac{vk}{2}u_{tt}+o(h^2)+o(k^2)\xrightarrow[h,k\to 0]{}0$$

وبالتالي الجملة متماسكة حسب تعريف التماسك

/ /

تمرين: (دورة الفصل الثاني 2013 - 2014) 6 علامة.

لتكن لدينا $0 < x < 1$; $u_t = u_{xx}$.

حيث: $u(1,x) = \sin(\pi x)$

$u(0,x) = u(t,0) = 0$

باستخدام طريقة (θ) الضمنية وبفرض لدينا:

$$T_{ij} = \frac{k^2}{6}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{h^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (2\theta-1)\frac{k}{h^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k^2}{h^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ادرس شرط التماسك حسب θ, h, k .

الحل: إن الحدّ الأول والثاني من عبارة خطأ الاقتطاع T_{ij} ينعدمان أياً كانت $h, k \to 0$

أما الحدّان الثالث والرابع فلا يمكن الجزم بانعدامهما لذلك نميز حالتين:

1) $k = \lambda h$ عندما $h \to 0$ نناقش حالات θ كالتالي:

* $\theta = \frac{1}{2}$ عندئذٍ: (ينعدم الحد الثالث)

$$\lim_{h\to 0} T_{ij} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{\lambda^2 \cancel{h^2}}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \neq 0$$

* $\theta \neq \frac{1}{2}$ عندئذٍ:

$$\lim_{h\to 0} T_{ij} = \lim\left[\underbrace{(2\theta-1)\frac{\lambda h}{h^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}_{\infty} - \underbrace{\frac{\lambda^2 \cancel{h^2}}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{0}\right] = \infty$$

عندما $h \to 0$

وبالتالي فالجملة غير متماسكة في حالة $k = \lambda h$ أياً كانت قيمة θ

2) $k = \lambda h^2$ عندما $h \to 0$ نناقش أيضاً حالات θ كما يلي:

* $\theta = \frac{1}{2}$ عندئذٍ:

$$\lim_{h\to 0} T_{ij} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-\lambda^2 h^4}{h^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t^2}\right] = 0$$

ومنه فالجملة متماسكة في هذه الحالة.

* $\theta \neq \frac{1}{2}$ عندئذٍ:

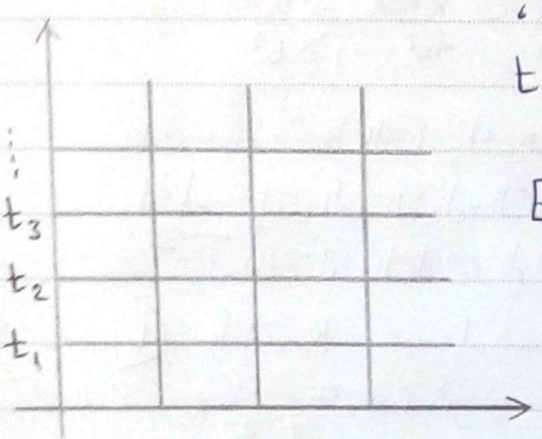
$$\lim_{h\to 0} T_{ij} = \lim\left[\underbrace{(2\theta-1)\cdot\frac{\lambda \cancel{h^2}}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}_{0} - \underbrace{\frac{\lambda^2 h^4}{h^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{0}\right] \neq 0$$

عندما $h \to 0$

وبالتالي الجملة غير متماسكة.

2 الاستقرار : Stability

- إذا عرفنا الخطأ بأنه الفرق بين الحلول التقريبية والحل الفعلي فإن الاستقرار هو أن الخطأ في إحدى مراحل الحسابات لا يؤدي إلى نمو الخطأ بالتقريب المتكرر (أخطاء تدوير الأعداد - وأخطاء الاقتطاع)



- إن المرحلة المقصودة هنا هي لحظة زمنية ما، حيث نحسب الأخطاء عند جميع النقاط في اللحظة t_1 ونأخذ الخطأ الأعظمي بينها وليكن E_1، ثم نأخذ الخطأ الأعظمي في اللحظة t_2، وليكن E_2 وهكذا ... فيجب أن يتحقق ما يلي:

$$\dots < E_3 < E_2 < E_1$$

أي $\forall j : E_{j+1} < E_j$

عندها يمكننا القول إن الطريقة مستقرة.

- ويمكن اختصار فكرة الاستقرار بالعبارة التالية:
(تغيرات صغيرة لا تؤدي إلى تغيرات كبيرة)

تذكرة:

- نصف القطر الطيفي لمصفوفة مربعة: $\rho(A)=\max|\lambda|$

حيث λ هي القيم الذاتية للمصفوفة A، وهي عبارة عن حلول المعادلة:

$$\det(A-\lambda I)=0 \quad ; \quad I \text{ هي المصفوفة الواحدية}$$

- نظيم مصفوفة مربعة: هناك ثلاث دوال نظيم للمصفوفة:

$$\|A\|_1=\max\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \quad , \quad \|A\|_\infty=\max\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

نظيم الأعمدة ، نظيم الأسطر

أما النظيم الأكثر استخداماً فهو: $\|A\|_2=\rho(A)=\max|\lambda|$

نصف القطر الطيفي.

* إنّ برهان الاستقرار عن طريق التعريف مباشرةً أمر في غاية الصعوبة، لذا عوضاً عن ذلك من الأسهل استخدام أدوات أخرى لإثبات الاستقرار.

1) تحليل ڤون نيومان للاستقرار: (تحليل فورييه)

تعتمد هذه الطريقة على افتراض أنّ الحل من شكل متسلسلة فورييه:

$$u_j = G^j e^{ik\Delta x}$$

أو بشكل آخر (مقبول أيضاً) نفترض أنّ الخطأ من شكل متسلسلة فورييه:

$$E_j = G^j e^{ik\Delta x}$$

حيث e هو العدد النيبري، و i هو العدد التخيلي العقدي، وليس دليلاً.

ثم نثبت أنّ $G^j < 1$. فتكون عندئذٍ الطريقة مستقرة.

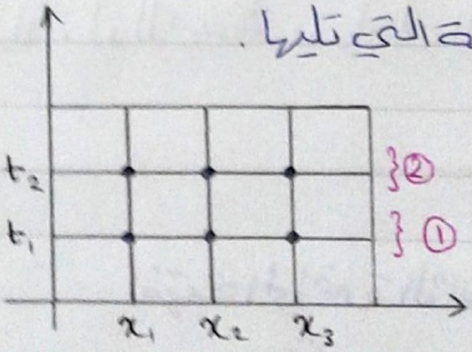
- نستخدم هذه الطريقة عادةً لدراسة استقرار طريقة الفروق للمعادلة المكافئية والزائدية.

2) طريقة المصفوفات: بعد تمثيل المسألة بالشكل المصفوفي ندرس القيم الذاتية لمصفوفة الأمثال A ، فإذا تحقق أنّ $\|A\|_2 < 1$ فإن الطريقة مستقرة.

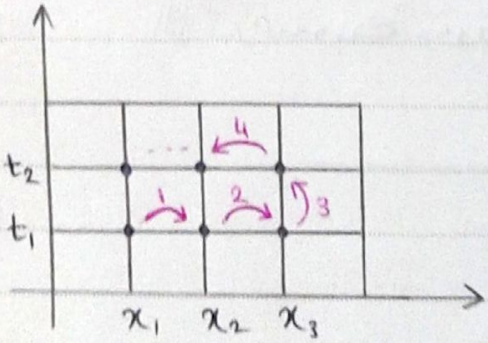
- نستخدم هذه الطريقة عادةً لدراسة استقرار طريقة الفروق للمعادلة الناقصية.

* نلاحظ أننا عند دراسة التماسك درسنا خطأ الاقتطاع عند كل نقطة من نقاط الشبكة الداخلية.

أما عند دراسة الاستقرار فنأخذ الخطأ الأعظمي في لحظة ما، ونقارنه بالخطأ الأعظمي في اللحظة التي تليها.



دراسة الاستقرار ① - ② ...



دراسة التماسك: 1 - 2 - 3 - 4 ....

3 التقارب : Convergence

نقصد بالتقارب أن نتائج الطريقة تتقارب نحو الحل التحليلي عندما $h,k \longrightarrow 0$

أي إذا كان الحل الفعلي هو $u(x,t)$

وكان الحل التقريبي عند النقطة (x_i, t_j) هو u_i^j

فإننا نقبل بالحل التقريبي ونقول إن الطريقة متقاربة إذا تحقق:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^j \xrightarrow[h,k \longrightarrow 0]{} u(x_i, t_j) \\ \forall x_i = ih \ , \ \forall t_j = jk \quad \text{وذلك} \end{array} \right\}$$

نظرية هامة :

التماسك + الاستقرار $\Longleftrightarrow$ التقارب .

- أي أنه لدراسة تقارب طريقة ما يكفي دراسة كل من تماسكها واستقرارها .

ملاحظة: غالباً ما يكون من السهل برهان التماسك ، أما الاستقرار فهو الأكثر صعوبة "وقد يكون مستحيلاً" ، لذلك نركز دوماً على الاستقرار .

انتهت المحاضرة الثانية

ت