حلول عددية

المحاضرة الأولى

٩/٣/٢٠١٥

مقدمة عن المقرر

- يقوم التحليل العددي كما نعلم بإيجاد خوارزميات للوصول إلى حلول تقريبية للمسائل الرياضية التي يكون حلها التحليلي الدقيق والعام مكلفاً جداً أو غير معروف.
- نواجه في كثير من المسائل التطبيقية والفيزيائية الحاجة لحل معادلات تفاضلية جزئية، وكون الحل التحليلي لمثل هذه المعادلات صعب جداً، بل ومستحيل في بعض الحالات ضمن الإمكانات الرياضية المتاحة حتى الآن، فإننا نلجأ للتحليل العددي لإيجاد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية التي نواجهها.
- عادةً ما تكون دراسة حل المعادلة التفاضلية في منطقة محددة ما، ويختلف حل هذه المعادلة حسب المنطقة التي تم الدراسة فيها.

فمثلاً: دراسة معادلة الحرارة في غرفة منتظمة على شكل متوازي مستطيلات تختلف عن دراستها في أنبوب متفرع غير منتظم الشكل.

ولذلك من المهم دوماً معرفة المنطقة التي نقوم بإيجاد حل المعادلة فيها حتى يتم اختيار الطريقة المناسبة للحل تبعاً لها.

- نهتم في هذا المقرر بدراسة بعض الخوارزميات المتبعة لإيجاد <u>الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية بمتحولين</u>.

حيث أن معطيات المسألة تكون عبارة عن: معادلة تفاضلية + شروط حدية

تذكرة:

شكل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية بمتحولين:

P D E

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

حيث A, B, C دوال في المتغيرين x, y وحيث $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

وتقسم إلى ثلاثة أصناف:

زائدية: إذا كان $\Delta > 0$

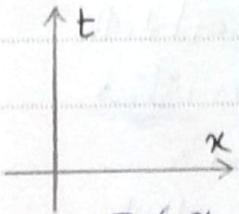
ناقصية: إذا كان $\Delta < 0$

مكافئية: إذا كان $\Delta = 0$

$\Delta = B^2 - 4AC$

حيث أن حل المعادلة التفاضلية هو إيجاد الدالة $z(x, y)$

- نستخدم في الحالات العادية الرمزين x, y للمتحولين، ولكن في المسائل التطبيقية عادةً ما يكون أحد المتحولين المدروسين هو الزمن،
لذلك سنسمي ذاك المتحول بالمتحول الزماني ونرمز له بـ t
بينما سندعو المتحول الآخر بالمتحول المكاني ونرمز له بـ x
وسيكون رمز الدالة المدروسة هو $u(x,t)$ بدلاً من $z(x,y)$



وسنستعمل الرموز التالية:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وسيكون لدينا الأشكال التالية من المعادلات التفاضلية:

1) المكافئية: $u_t = u_{xx}$ (وتدعى معادلة الحرارة)

2) الناقصية: $u_{xx} + u_{tt} = f(x,t)$

3) الزائدية: ولها شكلان: $u_{tt} = u_{xx}$, $u_t = u_x$

/ /

الشروط الحدية:

وتعطي بيانات إضافية على محيط المنطقة المدروسة، ونرمز للمحيط بـ Γ.
ولها عدة أنواع:

1) **شروط ديرخليه**: وتعطينا قيمة الدالة على المحيط، ولها الشكل:

$$u = g(x) \quad on\, \Gamma$$

2) **شروط نيومان**: وتعطي قيمة مشتق الدالة على المحيط، ولها الشكل:

$$u_t = g(x) \quad on\, \Gamma$$

3) **الشروط المختلطة**: وتجمع بين شروط ديرخليه ونيومان، وفي حال كانت هذه الشروط المختلطة خطية بالنسبة لكل من ديرخليه ونيومان فتدعى بشروط روبن.
أي أن لشرط روبن الشكل: $\alpha u + \beta u_t = g(x) \; on\, \Gamma$
حيث α, β ثابتان لـ x.

---

* سوف نتحدث عن طريقتين لحل المعادلات السابقة حلاً تقريبياً:

1. **طريقة الفروق المنتهية**: finite difference method

تستخدم عادةً عندما تكون منطقة الدراسة بسيطة ومنتظمة.
حيث يتم رسم شبكة منتظمة وأخذ المعادلة التفاضلية عند كل نقطة من النقاط الداخلية للشبكة، وبعد تطبيق الطريقة العددية للفروق نحصل على تمثيل مصفوفي للمسألة، يمكن حله فيما بعد بالطرق المعروفة في مقرر التحليل العددي (٢) لحل جمل المعادلات الخطية.
من مساوئ هذه الطريقة أنه كلما صغرت تقسيمات الشبكة زادت الدقة، وكلما ازداد عدد النقاط زادت المعادلات وصعبت الحل.
ويحصل هذا عندما تكون المنطقة المدروسة معقدة أو غير منتظمة، والأفضل في هذه الحالة استخدام طريقة العناصر المنتهية.

/ /

٢ طريقة العناصر المنتهية : finite element method

تستخدم عادةً للمسائل المعقدة غير المنتظمة لأنها تتيح إمكانية استخدام عدة أنواع من أشكال العناصر (مستطيلات ، مربعات ، مثلثات ، .....) مع بعضها البعض لتقسيم المنطقة المدروسة .
ثم نقوم باختيار توابع اختبار لكل من العناصر المأخوذة بحيث تحقق الشروط الحدية .
وهذه الطريقة هي الأكثر استخداماً في دراسة بناء الأشكال الميكانيكية والهندسية المعقدة والدقيقة .

- إن جودة كل من الطريقتين السابقتين في إيجاد حل تقريبي للمسألة المعطاة متقاربة ولكنّ كلفة طريقة العناصر المنتهية أكبر بكثير من طريقة الفروق المنتهية في حال كانت المنطقة منتظمة ، بينما تزداد كلفة طريقة الفروق المنتهية كلما ازداد تعقيد المنطقة لتصبح طريقة العناصر المنتهية أفضل في هذه الحالة

طريقة الفروق المنتهية

ليكن m هو عدد تقسيمات الشبكة المكانية

و n عدد تقسيمات الشبكة الزمانية.

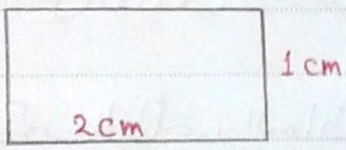
عندئذ: ندعو $h = \Delta x = \dfrac{\text{طول المجال المكاني}}{m}$ بالقياس المكاني للشبكة.

وندعو $k = \Delta t = \dfrac{\text{طول المجال الزماني}}{n}$ بالقياس الزماني للشبكة.

حيث h, k ثابتين وينتميان إلى المجال $]0, 1[$.

مثال توضيحي:

لتكن لدينا المنطقة مستطيلة الشكل:



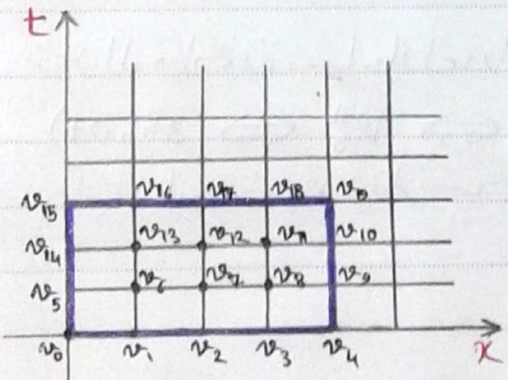
ونريد رسم الشبكة بحيث $m = 4$, $n = 3$

عندئذ يكون لدينا:

$$h = \Delta x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k = \Delta t = \frac{1}{3}$$

ويكون للشبكة الشكل التالي:



إن نقاط تقاطع الشبكة هي:

$$v_0 = u(x_0, t_0)$$

$$v_1 = u(x_1, t_0)$$

$$v_2 = u(x_2, t_0)$$

$$\vdots$$

$$v_{14} = u(x_0, t_2)$$

$$\vdots$$

أي أن القيم عند هذه النقاط هي قيم التابع $u(x, t)$ في الزمان والمكان المقابلين

إن النقاط: $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}, v_{19}, v_{18},$
$v_{17}, v_{16}, v_{15}, v_{14}, v_5$

هي عبارة عن نقاط حدية في الشبكة السابقة، والحل عندها يكون معروفاً من الشروط الحدية المعطاة في نص المسألة، وهي أول ما نوجده عند حل المسألة

أما النقاط الباقية: $v_6, v_7, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{13}$

فهي النقاط الداخلية للشبكة، ويكون الحل عند كل منها هو حل المعادلة التفاضلية المعطاة، وهذه الحلول هي التي نريد إيجادها بالطرق العددية للفروق.

- نلاحظ أن الحل هو عبارة عن حل نقطي عند النقاط الحدية والداخلية، حيث أن التحليل العددي لا يعطي حلاً مستمراً وإنما يعطي حلاً نقطياً متقطعاً.

- يكون الخطأ عند النقاط الحدية معدوماً، أي أن الحل العددي والحل الفعلي متطابقان عند النقاط الحدية.
بينما توجد الأخطاء عند النقاط الداخلية فقط.

- نرمز للنقطة نفسها خلال دراستنا بعدة رموز متكافئة مثل:

$$v_3 \Leftrightarrow v(x_3, t_0) \Leftrightarrow v_{3,0} \Leftrightarrow v_3^0 \Leftrightarrow (3h, 0t)$$

(انظر النقطة v_3 في الرسمة السابقة)