المحاضرة الرابعة — الاثنين ٢٣/٢/٢٠١٥م

حل مسائل

مثال (1): اوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة كما يلي ثم استنتج ان الدالة ذات تغير محدود.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x=0 \\ 1-x & ; 0<x<1 \\ 5 & ; x=1 \end{cases}$$

الحل:

لتكن P تجزئة للمجال $[0,1]$ ، $P=\{x_0=0<x_1<x_2<\dots<x_n=1\}$

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = |f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+$$
$$+|f(x_3)-f(x_2)|+\dots+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$\Rightarrow V(f,P)=|(1-x_1)-0|+|(1-x_2)-(1-x_1)|+|(1-x_3)-(1-x_2)|$$
$$+|(1-x_3)-(1-x_2)|+\dots+|(1-x_{n-1})-(1-x_{n-2})|+|(5)-(-x_{n-1}+1)|$$

$$V(f,P)=|1-x_1|+|1-x_2-1+x_1|+|1-x_3-1+x_2|+|1-x_3-1+x_2|$$
$$\dots+|1-x_{n-1}-1+x_{n-2}|+|5+x_{n-1}-1|$$

بملاحظة ان $x_k>x_{k-1}$ يمكننا ازالة القيمة المطلقة.

$$\Rightarrow V(f,P)=1-x_1+x_2-x_1+x_3-x_2+\dots+x_{n-2}-x_{n-3}+x_{n-1}-x_{n-2}$$
$$+4+x_{n-1}$$
$$=1-2x_1+2x_{n-1}=5-2(x_{n-1}-x_1)$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}f=\sup_{P\in P[a,b]}\{5-2(x_{n-1}-x_1)\}=7$$
$$x_1\to 0 \wedge x_{n-1}\to 1$$

وبما ان $\overset{1}{\underset{0}{V}}f=7<\infty$ فان الدالة f دالة ذات تغير محدود.

مثال (2): أثبت ان الدالة f المعرفة على $[0,1]$ بالشكل $f(x)=x-x^2$ هي دالة تغير محدود ثم اوجد $\overset{1}{\underset{0}{V}}f$

الحل: x دالة متزايدة على $[0,1]$ كذلك الدالة x^2

إذاً الدالة $x - x^2$ هي دالة تغير محدود حسب الخاصية 6 من المجزءة السابقة، بقي أن نوجد $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$ (التغير الكلي للدالة)

لندرس تغيرات هذه الدالة: $f(x) = x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x$

$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

نعلم أن: $\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \underbrace{\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{V}} f}_{\text{تكون الدالة متزايدة}} + \underbrace{\overset{1}{\underset{\frac{1}{2}}{V}} f}_{\text{تكون الدالة متناقصة}}$

$$\Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}} f = \left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f(0)\right| + \left|f(1) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|$$
$$= \left|\tfrac{1}{4} - 0\right| + \left|\tfrac{1}{4} - 0\right| = \tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}} f = \tfrac{1}{2} < +\infty$$

مثال (3):

لتكن $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ دالة معرفة على $[2,+\infty[$

اوجد $\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f$ ؟ استنتج ان f دالة ذات تغير محدود.

الحل: لندرس تغيرات الدالة:

$f'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x+1)^4}$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow -2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$-$	
$f(x)$				$\frac{1}{9}$	$\searrow$	0

ومنه فإن f دالة متناقصة وبالتالي:

$$\overset{\infty}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A\to\infty} \overset{A}{\underset{2}{V}} f = \lim_{A\to+\infty} |f(A) - f(2)| = \lim_{A\to\infty} \left|\frac{1}{(A+1)^2} - \frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9} < +\infty$$

ومنه f دالة ذات تغير محدود.

انتهت المجزءة...