المحاضر الأولى لطلاب السنة الرابعة تحليل

15/3/2015

النمذجة الرياضية

مقدمة :

نصادف في حيتنا اليومية الكثير من الحالات التي تستوقفنا وتتطلب منا دراسة مركزة لإعطاء القرار الأمثل لطبيعة هذه الحالات مثلا

إنشاء اوتوستراد بين مدينتين - اختيار وسيلة الإعلان – أنظمة الطاقة الكهرمائية – توظيف مفتشين في شركة لضبط جودة الإنتاج- عضلة القلب والية عملها – التحكم في المخزون – تعيين موقع مستودع - -------الخ

إذا نحتاج إلى تعريف أساليب علمية عملية فعالة تمكننا من اتخاذ القرار الأمثل ، فكان أسلوب النمذجة وإسقاط نظرياته على كافة فروع العلم.

النمذجة

بعض التعاريف للنمذجة :

النمذجة: هي تعبير عن وصف لمسار اشتغال العلم وكيفية بناءه أو إنتاجه.

النمذجة: مبدأ أو تقنية تمكن الباحث من بناء نموذج لظاهرة أو لسلوك عبر إحصاء المتغيرات أو العوامل المفسرة لكل واحدة من هذه المتغيرات.

النمذجة: بناء فكري لنموذج رياضي موجه نحو وصف الواقع .

النمذجة: مجموعة إجراءات تتضمن عمليات معقدة مرتبطة ببعضها لإنشاء نموذج ممثل لحالة حقيقية .

النمذجة هي اختصاص له قواعده وآلياته وتتكيف مع المجال الذي تدرسه وتقوم بصياغة الموضوع قيد الدراسة والعمل على تبسيطه .

بعض التعاريف للنموذج :

النموذج: تمثيل لحالة حقيقية بشيء أبسط منها .

النموذج : هو التمثل الذهني لشيء ما و اكيفية اشتغاله.

النموذج : هو نظرية موجهة نحو الفعل الذي نريد تحقيقه.

Scanned by CamScanner

دور النمذجة في بناء العلم

كيف يساهم فكل النمذجة في تقدم المعرفة العلمية؟

تسمح النمذجة في الرياضيات التطبيقية وعند تطبيقها في الكيمياء والفيزياء أو في علوم الحياة والأرض بتحليل ظواهر واقعية وتوقع النتائج من خلال تطبيق نظرية واحدة أو مجموعة من النظريات بشكل تقريبي.

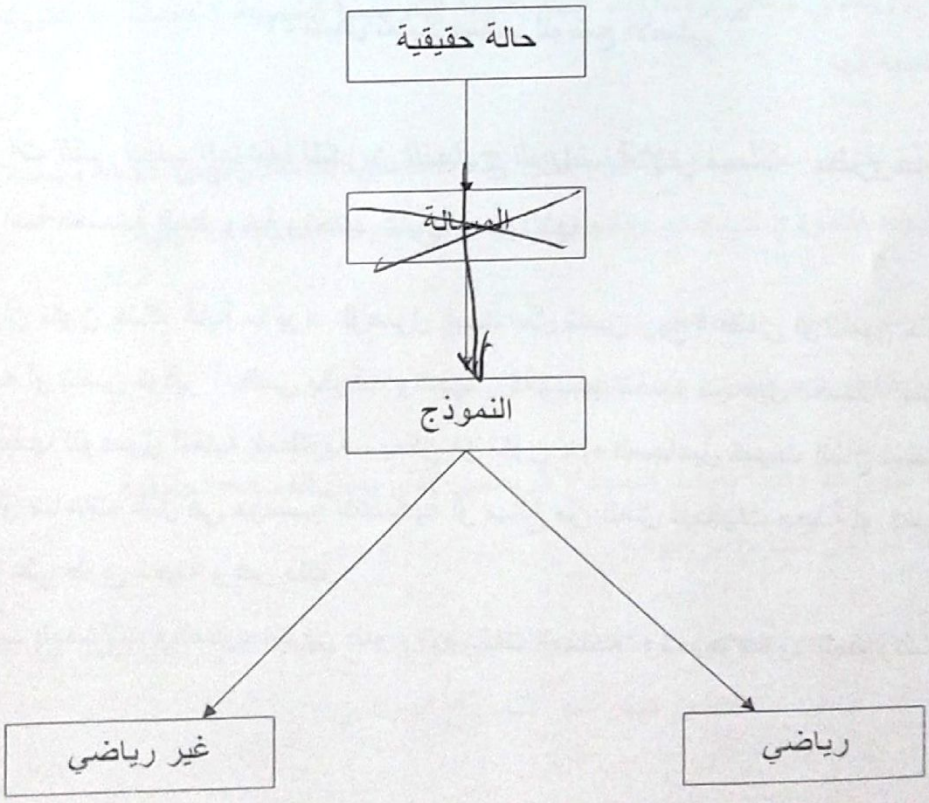
تصنيف النماذج

تصنف النماذج وفق ما يأتي:

النماذج غير الرياضية : نماذج لغوية ، نماذج رسومية و مخططات ...

النماذج الرياضية : فهي ولعدة أسباب تعد الأهم والأكثر استخداماً من سائر أنواع النماذج الأخرى. و يكون الهدف من النمذجة هو تحليل سلوك نظام ما لمعرفة ميزاته إذا كان النظام موجوداً أو من أجل إيجاد أفضل تصميم له .

نلخص ماسبق بالمخطط التالي



Scanned by CamScanner

النمذجة الرياضية

النمذجة الرياضية :

للنمذجة الرياضية مجموعة من التعاريف ، نختار منها

النمذجة الرياضية: هي صياغة مسألة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسم النموذج الرياضي.

النموذج الرياضي

يعرف النموذج الرياضي كما يلي :

هو عبارة عن مجموعة من العلاقات الرياضية والمنطقية التي تمثل أوجه الحالة قيد الدراسة، حيث تصف هذه النماذج علاقات هامة بين المتحولات .

يتألف النموذج الرياضي من :

١- تابع موضوعي هدفي: الذي يجب زيادته إلى الحد الأعلى أو إنقاصه إلى الحد الأدنى

٢- قيود : تحصر الحلول بالقيم الممكنة، أي التي تحد قيم المتحولات.

شروط النماذج الرياضية : يجب أن تكون النماذج

١- قابلة للحل

٢- تشكل تمثيلا صالحاً للوضع الأصلي

الخطوات التي يجب إتباعها لتكوين النماذج الرياضية لأي مسألة مطروحة:

١- دراسة المسالة المطروحة وتحديد غايتها ومكوناتها :

يجب أن تكون هناك غاية ما يراد الوصول إليها، مثل تأمين ربح أعظمي أو تأمين كلفة أصغريه أو تأمين توفير أعظمي بالوقت والجهد . كما يجب تحديد مجاهيل المسألة التي يجب إيجاد قيمها للوصول للغاية المطلوبة ، يمكن أن تكون هذه المجاهيل كميات إنتاج لمنتجات معينة أو ساعات عمل في مؤسسة اقتصادية أو مبالغ من المال لفعاليات معينة أو كميات منقولة على طرق معينة وغير ذلك.

٢- تحديد المدخلات والمخرجات في ضوء الإمكانات المتاحة وتحديد القيود المفروضة على المسالة .

Scanned by CamScanner

مثلا الشركة لا تستطيع توفير أكثر من كمية معين من المواد الأولية لأسباب قد تكون خارجة عن إرادتها ، أو في نظام ميكانيكي مثلاً يجب ألا تزيد سرعته على حد معين.

٣- بيان علاقات التأثير بين مجاهيل المسألة :

مثلا في مصنع معين ، إذا زاد إنتاج أحد المنتجات فإن ذلك سيؤدي إلى إنقاص الإنتاج من المنتجات الأخرى .

كما أن هناك شروطا يجب أن تحققها هذه المجاهيل بغض النظر عن مردودها من حيث الغاية التي يجب تحقيقها .

مثلا إذا كان أحد المجاهيل ممثلا لكمية منتجة ، يشترط فيه ألا يكون سالبا ، وقد يفترض فيه ألا يقل أو يزيد عن كمية معينة.

بعد تحديد كل ما ورد أعلاه فإنه بالإمكان صياغة المسألة ضمن علاقات رياضية بمجموعها نطلق عليها اسم " النموذج الرياضي " .

تجدر الإشارة هنا إلى أن المسألة الحقيقية بشكل عام قد لا تكون سهلة الترجمة إلى نماذج رياضية . حتى لو فرضنا أنه من الممكن ترجمة أي مسألة نصية إلى نموذج رياضي ، فإنه ليس من الضروري أن يكون لكل نموذج رياضي حلول . لذلك فإنه من الضروري أن نبسط المسألة أو نقربها إلى مسألة أخرى قريبة منها ، وفي الوقت نفسه تكون أسهل للترجمة إلى نموذج رياضي ، على أن نحافظ أثناء عملية التقريب (التبسيط) لمسألة ما على كل الميزات الأساسية لها .

مثلا ، عند دراسة حركة كوكب ، يمكن عده نقطة في الفضاء ونهمل حجمه وشكله.

بعد إيجاد النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة الحقيقية ،

فإننا نكون أمام إحدى حالتين:

١- إذا كانت هذه النتائج جيدة ومُرْضية :

فإننا نكون قد وفقنا بإيجاد النموذج الرياضي الذي يمثل المسألة الحقيقية .

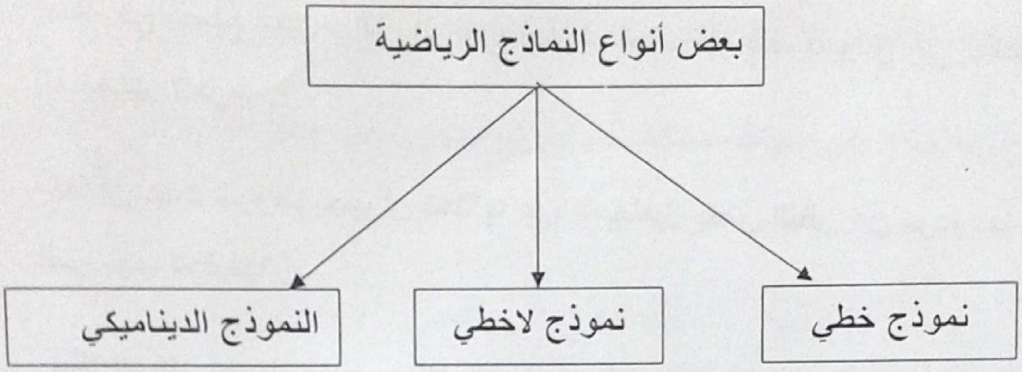
٢- إذا لم تكن النتائج مُرْضية :

فإننا نحاول إجراء بعض التعديلات والتغييرات في الفرضيات التي اعتبرناها عند تقريب المسألة ، أو أن نبحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي.

Scanned by CamScanner

أنواع النماذج الرياضية

للنماذج الرياضية أنواع نذكر منها



النموذج الخطي : إذا كان متغير دالة الهدف ومجموعة القيود جميعها من الدرجة الأولى فإن النموذج الرياضي يدعى نموذجا خطيا

النموذج اللاخطي : إذا كان تابع الهدف أو أحد قيود النموذج من الدرجة الثانية فما فوق فإن النموذج يدعى نموذجا لاخطي

النموذج الديناميكي : هي النماذج التي يمكن تجزئتها إلى خطوات ترتبط بمعيار معين حسب طبيعة الحالة موضع الدراسة .

البرمجة الرياضية

تعريف البرمجة : إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة ما لبلوغ هدف معين

تعريف البرمجة الرياضية: إن مسألة البرمجة الرياضية تعني – بشكل عام – البحث عن القيمة المثلى (صغرى أو عظمى) لتابع جبري يضم عدة متغيرات ، تخضع هذه المتغيرات لمجموعة من القيود تأخذ صيغة مساويات أو متراجحات
إن حل مسألة البرمجة الرياضية يتطلب إذاً إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع القيود وتحقق القيمة المثلى لدالة الهدف.
والبرنامج الرياضي ما هو إلا نموذج رياضي لمسألة ما.

أنواع البرمجة الرياضية

للبرمجة الرياضية أنواع ندرس منها وبالتفصيل

البرمجة الخطية – البرمجة اللاخطية – البرمجة الديناميكية وما يتفرع عن كل واحدة منها

Scanned by CamScanner

تتمة محاضرة أولى :

البرمجة الخطية

مقدمة :

إن البرمجة الخطية هي الأسلوب المساعد على حسن انتقاء القرار وإقرار البرنامج الأفضل للفعاليات المستقلة بعد الأخذ بعين الاعتبار المصادر المتاحة حيث إن كلمة خطية تعني أن العلاقات التي تنطوي عليها المسالة المطروحة للحل بواسطة هذه الطريقة هي علاقات خطية بينما تنسب كلمة برمجة إلى عملية إعداد البرنامج الخاص أو المخطط للمسالة المطروحة .

تتميز مسائل البرمجة الخطية بوجود عدد كبير من الحلول المقبولة لها وتتطلب إيجاد حل مثالي من بين مجموعة تلك الحلول المقبولة .

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المسائل الإدارية والاقتصادية و العسكرية------الخ

و قد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التقني الذي ساعد على تطوير الحاسبات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة.

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء النموذج .

من أجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توافر العناصر الأساسية التالية :

أ - تحديد الهدف بصورة كمية:

يعبر عنه بتابع الهدف و هو التابع المطلوب إيجاد القيمة العظمى (أو الصغرى) له.

يجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كميا كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ما يمكن من الربح أو تأمين أصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت و الجهد.

ب- تحديد القيود:

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس.

و يتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو مساويات.

إذا كان احد المجاهيل يعبر عن كمية منتجة فيشترط أن لايكون سالبا وقد يفترض فيه أن لايقل أو يزيد عن كمية معينة .

Scanned by CamScanner

بالنسبة للعلاقات الرياضية التي تعبر عن تابع الهدف والقيود يجب أن لاتحوي على عمليات ضـــرب أو قـــسمة بـــين المتغيـــرات وان لايكـــون إحـــداها مرفـــوع إلـــى قـــوة .

ج- تحديد البدائل المختلفة:

و يشير هذا العنصر إلى أن يكون للمسالة أكثر من حل واحد لأنه إذا كان للمسالة حل واحد لايوجد ضرورة لاستخدام البرمجة الخطية، بتعبير آخر تتركز فائدة البرمجة الخطية بالمساعدة على اختيار أفضل حل من بين الحلول المختلفة و المتعددة المقبولة .

أنواع النماذج الخطية

من ناحية تابع الهدف يمكن أن نميز بين نوعين من المسائل

١- مسالة تعظيم :

وهي المسالة التي تأخذ الصياغة التالية :

$$f(x) = \sum c_j x_j \rightarrow Max$$

أي المطلوب إيجاد اكبر قيمة لهذا التابع ضمن الشروط المفروضة

٢- مسالة تقليل :

وهي مسالة البرمجة الخطية التي تأخذ لها تابع الهدف التالي

$$f(x) = \sum c_j x_j \rightarrow Min$$

أي المطلوب إيجاد اصغر قيمة لهذا التابع ضمن الشروط المفروضة

Scanned by CamScanner

من ناحية القيود يمكن أن نميز بين شكلين :

١- الشكل العام :

لا يشترط على القيود أن تكون من نوع محدد حيث إن النموذج يمكن أن يحتوي على خليط مختلف من القيود ($\leq, =, \geq$) ويكون ~~الشكل الرياضي~~ النموذج الرياضي للمسألة

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max \quad \text{أو} \quad Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,---n \quad \text{حيث}$$

٢- الشكل القياسي :

وفيه تكون كافة القيود من الشكل النظامي لمسألة البرمجة الخطية وهي على هيئة معادلات أي انه شكل عام فيه كافة القيود عبارة عن معادلات حيث يكون النموذج الرياضي للمسألة

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Max \quad \text{أو} \quad Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,---n \quad \text{حيث}$$

نستطيع استخدام المصفوفات للتعبير عن الشكل القياسي حيث يصبح النموذج الرياضي كالتالي

Scanned by CamScanner

$$Z = cx \rightarrow Max \quad \text{أو} \quad Min$$

ضمن الشروط الخطية $A.x = B$

وشروط عدم السلبية $x \geq 0$ حيث

$$A_{(m.n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ---- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ---- & a_{2n} \\ & & ---------- & \\ a_{m1} & a_{m2} & ---- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{(n)} = [c_1, c_2, ---- c_n]$$

$$x_{(n.1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{(m.1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ - \\ b_m \end{bmatrix}$$

تستخدم البرمجة الخطية في مجالات كثيرة نذكر منها

١- نموذج توزيع الجهد أو تخطيط الإنتاج :

لنفرض أن مصنعا يمكنه إنتاج الأنواع A_j من المنتجات حيث $j = 1,2,---- n$ وذلك باستخدام المواد الأولية B_i حيث $i = 1,2,---- m$ التي تتوفر منها الكميات b_i حيث $i = 1,2,---- m$ إذا كانت الواحدة من المنتج A_j تستهلك من المادة الأولية B_i الكمية a_{ij} وإذا كان الربح الصافي للمصنع من إنتاج الواحدة من المنتج A_j هو C_j فالمطلوب تنظيم الإنتاج في هذا المصنع بحيث يكون الربح أعظميا

Scanned by CamScanner