SUBJECT:

المحاضرة الأولى.

(تذكرة عامة)

* فضاء العينة: هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ونرمز لها عادة ب (Ω) اوميغا

مثال: في تجربة إلقاء حجر النرد نجد

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

* الحدث العشوائي: هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة ويرمز له بأحرف كبيرة A، B، ....

مثال:

$A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3\}$, $C = \{2, 5\}$

كلها أحداث من Ω

بينما المجموعة $M = \{2, 9\}$ ليست حدثا

* الحدث الابتدائي: كل حدث مكون من عنصر واحد من Ω

مثال:

* $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ أحداث ابتدائية

وقوع حدث:

نقول عن حدث A أنه قد وقع إذا كانت نتيجة التجربة w تنتمي الى A: $w \in A$

مثال:

إن الحدث $A = \{2, 4, 6\}$

يقع إذا كانت نتيجة التجربة 2 أو 4 أو 6

في حين انه لا يقع إذا كانت نتيجة التجربة 1 أو 3 أو 5

. نسمي الحدث Ω بالحدث الأكيد

. نسمي الحدث $\varnothing$ بالحدث المستحيل

الحدثان المنفصلان (المتنافيان)

نقول عن الحدثين A و B انهما متنافيان أو منفصلان إذا كان $A \cap B = \varnothing$ اي لا يمكن وقوعهما معا

* متمم حدث: متمم حدث A هو حدث يتضمن كل نقاط العينة التي لا تنتمي الى A ونرمز له ب $\bar{A}$

وبالتالي لدينا

$\bar{A} = \Omega / A$, $A = \Omega / \bar{A}$

$A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$

تجزئة فضاء العينة

(تعريف) تسمى المجموعة التي عناصرها مجموعات صفا أو أسرة من المجموعات، فلو كتبنا الصف أو الأسرة

$F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$

يجب أن نفهم أن $F_1, \dots, F_n$ كلها مجموعات من العناصر، وبما أن كل حدث هو مجموعة من نقاط العينة (فضاء العينة) فنتحدث عن صف أو أسرة من الأحداث)

(تعريف)

نقول عن أسرة الاحداث $F = \{F_i \subseteq \Omega , i \in I\}$ $I \subseteq N$ (مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد) انها تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω إذا تحققت الشروط

1) $\forall F_i \in F , \quad F_i \neq \varnothing$

2) $\forall F_i, F_j \in F : i \neq j , \quad F_i \cap F_j = \varnothing$

3) $\bigcup_{i \in I} F_i = \Omega$

نسمي الأحداث F_i حيث $i \in I$ بعناصر التجزئة F

مثال:

في تجربة القاء حجر نرد نجد أن الأسرة المكونة من العنصرين

$F_1 = \{1, 3, 5\}$

$F_2 = \{2, 4, 6\}$

تشكل تجزئة لفضاء العينة $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

(الجبر والجبر التام (σ - جبر))

إذا كانت Ω فضاء الاحداث الابتدائية وكانت F صفا غير خال من اجزاء Ω فإننا نقول عن F انه جبر على Ω إذا تحقق الشرطين التاليين

1) $\forall A, B \in F , \quad A \cup B \in F$ (مغلق بالنسبة للاجتماع)

SUBJECT: ______ / /

2) $\forall A\in F ,\ A'\in F$ (مغلق بالنسبة للإتمام)

تعريف..

إذا كان F جبراً على Ω وتحقق الشرط التالي

$\forall A_1, \dots A_i \dots \in F ;\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود)

فإننا نقول عن F إنه جبر تام على Ω أو (σ-جبر على Ω)

مثال..

- $P(\Omega)$ مجموعة جميع أجزاء Ω هي جبر وجبر تام على Ω
- $F=\{\emptyset, \Omega\}$ هو جبر وجبر تام على Ω
- المجالات المفتوحة من $\mathbb{R}$ ليست جبر على Ω

نتائج..

1) إذا كان F جبراً على Ω أو جبراً تاماً على Ω فإن

$\Omega, \emptyset \in F$

البرهان..

F جبر $\Rightarrow \forall A\in F,\ A'\in F \Rightarrow A\cup A'\in F \Rightarrow \Omega\in F$

$\Rightarrow (\Omega)'\in F \Rightarrow \emptyset \in F$

2) إذا كان F جبراً على Ω فإن F مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي

$\forall A_1, \dots A_n\in F ;\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$

3) إذا كان F جبراً على Ω فإن مايلي محقق

$\forall A,B\in F ;\ A\cap B\in F$

البرهان..

$\forall A,B\in F,\ A',B'\in F \Rightarrow A'\cup B'\in F \xrightarrow{\text{دورغان}}$

$(A\cap B)'\in F \Rightarrow ((A\cap B)')'\in F \Rightarrow A\cap B\in F$

4) إذا كان F جبراً على Ω فإن F مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي

$\forall A_1, \dots A_n\in F \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i\in F$

5) كل جبر تام على Ω هو جبر على Ω ولكن العكس غير صحيح

6) في الحالة الخاصة عندما تكون Ω مجموعة منتهية فإن كل جبر على Ω هو جبر تام على Ω

7) إذا كان F جبر على Ω فإن F مغلق بالنسبة لعملية الفرق

$\forall A,B\in F \Rightarrow A\setminus B\in F$

حسب (3) $A\cap B' ,\ A\in F,\ B'\in F$

8) تقاطع الجبور (التامة) هو جبر (تام)

تعريف..

إن الجبر (الجبر التام) هو الجبر التام الذي يولده F وهو عبارة عن تقاطع كل الجبور التامة التي تحوي F

$\sigma(F) = \bigcap_{F\subset K_i} K_i$

تعريف..

إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحدودة من $\mathbb{R}$ يدعى جبر بوريل وكل مجموعة منتمية له تدعى مجموعة بوريلية

نتيجة..

إن كل مجموعة جزئية أحادية العنصر $\{x\}$ من $\mathbb{R}$ هي بوريلية

لأن $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x-\frac{1}{n} , x+\frac{1}{n}\right]$

ولما كانت المجالات المحدودة تنتمي إلى جبر بوريل (وهو جبر تام)

تعريف..

إذا كانت Ω مجموعة غير خالية، و F جبر تام على Ω فإننا ندعو الثنائية (Ω, F) فضاءً مقيساً وندعو كل عنصر من F مجموعة مقيوسة

نتيجة: إن Ω ، $\emptyset$ مجموعات مقيوسة

تعريف..

ليكن (Ω, F) فضاءً مقيوساً، نقول عن الدالة $M:(\Omega,F)\to[0,+\infty]$ إنها تمثل قياساً على F إذا تحقق الشرط

1) $M(\emptyset)=0$

2) $\forall A_1, A_2, \dots A_i, \dots \in F ;\ i\neq j,\ A_i\cap A_j=\emptyset$

$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(A_i)$

تعريف: ندعو الثلاثية (Ω, F, M) فضاء القياس M

حالة خاصة: إذا كان $M(\Omega)=1$ فإن M يدعى قياساً احتمالياً ونرمز له بـ P ويصبح (Ω, F, P) فضاء القياس الاحتمالي (فضاء احتمالي)

المحاضرة الثانية

الفضاء الاحتمالي: هو ثلاثية (Ω, F, p) حيث
Ω فضاء العينة (فضاء الأحداث الابتدائية)
و F جبر تام على Ω و p دالة حقيقية
معرفة على F تُلحق كل حدث A من F بعدد
حقيقي يسمى احتمال A ونرمز له بـ $p(A)$

$$p: F \to \mathbb{R} \;,\; A \to p(A)$$

ولكي يتعين الفضاء الاحتمالي بشكل تام لابد
من تعريف قاعدة الربط $p(A)$

التعاريف الأساسية للاحتمال

← التعريف التقليدي: إذا كان فضاء الأحداث
الابتدائية لتجربة ما مجموعة منتهية عدد
عناصرها n أي $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
وكانت الأحداث الابتدائية $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ متساوية
الفرص في الوقوع ولكن A حدثاً متعلقاً
بهذه التجربة أي $A \in F$ فإننا نعرف
احتمال وقوع الحدث A بالشكل $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
حيث $|A|$ عدد إمكانات وقوع الحدث A
و $|\Omega|$ عدد الإمكانات الكلية للتجربة
(هنا $|\Omega| = n$)

← التعريف الهندسي للاحتمال:
يُعرف بالعلاقة $p(A) = \frac{n(A)}{m(\Omega)}$
حيث $n(A)$ قياس الحدث A
و $m(\Omega)$ قياس الحدث الأكيد Ω
ولابد الإشارة إلى أن هذا القياس يمكن
أن يكون طولاً أو مساحة أو حجم أو...

← التعريف البديهي للاحتمال (كولموغوروف)
نسمي كل دالة حقيقية $p: F \to \mathbb{R}: A \to p(A)$
(حيث F جبر تام على Ω) دالة احتمال إذا
تحققت المسلمات التالية

1) من أجل أي حدث A من F يكون $p(A) \geq 0$
2) $p(\Omega) = 1$
3) من أجل حدثين متنافيين $A, B \in F$ $[A \cap B = \emptyset]$
يكون $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
4) إذا كانت المتتالية غير المنتهية من الأحداث الابتدائية
المتنافية مثنى مثنى $A_1, A_2, \dots \in F$ فإن

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

نتائج

1) $p(\emptyset) = 0$
البرهان: بما أن $\emptyset \in F$ وبالتالي $p(\emptyset) \geq 0$
ولدينا $1 = p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset)$
$= p(\Omega) + p(\emptyset)$
$1 = 1 + p(\emptyset) \Rightarrow p(\emptyset) = 0$

2) إذا كان $A \in F$ فإن الحدث المتمم $\bar{A} \in F$ ويكون
$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
البرهان:
لدينا $\bar{A} \cap A = \emptyset$ و $\bar{A} \cup A = \Omega$ وبالتالي
$p(\Omega) = p(\bar{A} \cup A) = p(\bar{A}) + p(A) = 1$
$\Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

3) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ تشكل
تجزئة لـ Ω فإن $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$
البرهان:
من أجل $i = 1, \dots, n$ لدينا $A_i \cap A_j = \emptyset$
حيث $i \neq j$
وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
$\Rightarrow p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = p(\Omega) = 1$
وحسب الخاصة (2) نجد أن
$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$

4) إذا كانت $A,B \in f$ وكانت $A \subset B$ فإن
$$p(B/A) = p(B) - p(A)$$
وإن $p(A) \leq p(B)$

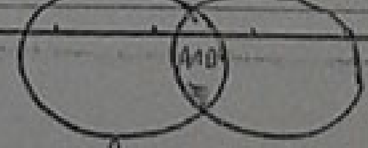
البرهان:
$$B = A \cup (B/A)$$
لأن $A \cap (B/A) = \emptyset$ ومنه
$$p(B) = p(A) + p(B/A)$$
$$\Rightarrow p(B/A) = p(B) - p(A)$$

5) من أجل أي حدث $A \in f$ يكون
$$0 \leq p(A) \leq 1$$

البرهان:
لدينا $\emptyset \leq A \leq \Omega$
$$\xRightarrow{\text{نتيجة } (4)} p(\emptyset) \leq p(A) \leq p(\Omega)$$
$$\Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

مبرهنة (هامة) (إمتحان)
من أجل حدثين $A,B \in f$ يكون
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

البرهان:
$$A \cup B = A \cup (B/(A \cap B))$$
$$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B/(A \cap B))$$
وبما أن $A \cap B \subset B$ وبالتالي
$$p(B/(A \cap B)) = p(B) - p(A \cap B)$$
$$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



مبرهنة
من أجل أي ثلاثة أحداث $A,B,C \in f$ فإن
$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

البرهان:
حسب المبرهنة السابقة يمكننا أن نكتب
$$p(A \cup B \cup C) = p(A \cup [B \cup C])$$
$$= p(A) + p(B \cup C) - p(A \cap (B \cup C))$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - p((A \cap B) \cup (A \cap C))$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - [p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C)]$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) + \cancel{p(A \cap C)} + p(A \cap B \cap C)$$

مثال:
بفرض أن A و B حدثين متنافيين وأن $p(A) = 0{,}30$ ، $p(B) = 0{,}60$ أوجد كلا من
$p(\bar{A})$ ، $p(\bar{B})$ ، $p(A \cup B)$ ، $p(A \cap B)$
$p(A \cup \bar{B})$ ، $p(\bar{A} \cup \bar{B})$ ، $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

الحل:
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0{,}70$$
$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0{,}40$$
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0{,}90$$
$$p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$$
$$p(A \cup \bar{B}) = p(A) + p(\bar{B}) - p(A \cap \bar{B})$$
وبما أن $A \cap B = \emptyset$ وبالتالي $A \subset \bar{B}$
$$p(A \cup \bar{B}) = \cancel{p(A)} + p(\bar{B}) - \cancel{p(A)}$$
$$= p(\bar{B}) = 0{,}40$$

SUBJECT: ______ / /

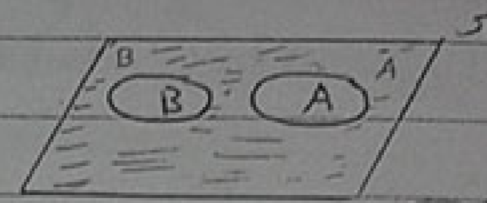
$p(\bar{A}\cap\bar{B}) = p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B)$

$= ١ - ٠,٩٠ = ٠,١٠$

$p(\bar{A}\cap B) =$

بما أن $A\cap B=\emptyset$ فإن $B\subseteq\bar{A} \Leftarrow \bar{A}\cap B = B$

$\Rightarrow p(\bar{A}\cap B) = p(B) = 0{,}60$



طرائق العد

١- قاعدة الـ $m\times n$

إذا احتاج عمل ما لمرحلتين فإن المرحلة الأولى تتم بـ m طريقة ومن أجل كل طريقة تتم المرحلة الثانية بـ n طريقة فإن العدد الكلي للأشكال المختلفة من أجل استكمال هذا العمل هو $m\times n$ طريقة

مثال

قاعة احتفالات لها أربعة أبواب بكم طريقة مختلفة يمكنك الدخول إلى القاعة والخروج منها دون أن تستخدم الباب ذاته في الدخول والخروج

الحل

إن هذه العملية تتم بمرحلتين

1) الدخول يتم بـ 4 طرق

2) الخروج يتم بـ 3 طرق

ومنه عدد الطرق الكلية هو $4\times 3 = 12$

٢- المبدأ الأساسي في العد

وهي تعميم لقاعدة الـ $m\times n$ وذلك إذا احتاج عمل ما إلى k مرحلة وكل مرحلة تحتاج إلى n_i مرحلة $(i=1,2,\dots,n)$ فيكون عدد المراحل المختلفة لإتمام هذا العمل هو $n_1\times n_2\times\dots\times n_k$

مثال

كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام 1,2,3,4,5 على أن لا يتكرر الرقم في أي عدد أكثر من مرة؟

الحل

1) الآحاد بـ 5 طرق

2) العشرات بـ 4 طرق

3) المئات بـ 3 طرق

فيكون عدد الأعداد الكلية المكونة من ثلاث أرقام

$5\times 4\times 3 = 60$

المحاضرة الثالثة

طرائق العد

حالة خاصة

إذا كانت لدينا تجربة مجموع نتائجها (N) وكررنا هذه التجربة n مرة وبشكل مستقل في كل مرة عن المرات الأخرى عندئذٍ يكون عدد النتائج الكلية هو $|\Omega| = N^n$

مثال: الأسرة ← ذكور إناث

تجربة دراسة توزع الذكور لدى أسرة مؤلفة من ثلاثة أطفال، لدينا هنا $|\Omega| = 2^3 = 8$ وفضاء العينة هو

$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$

ملاحظة

في حالة تجربة ثنائية (لها ناتجان فقط) وكررنا بشكل مستقل هذه التجربة n مرة وبفرض Ω فضاء العينة عندئذٍ يكون $|\Omega| = 2^n$

العينات المرتبة

إذا كانت B مجموعة غير خالية وكانت $r\in N$ فإن كل عنصر $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ من B^r يدعى في مفهوم علم الاحتمال والإحصاء (عينة مرتبة من الحجم r) مأخوذة من المجموعة B

ويكون عدد العينات المرتبة هذه يساوي

أ) في حالة $|B|=n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة

$$|\Omega| = |B|^r = n^r$$

ب) في حالة $|B|=n$ والسحب r مرة دون إعادة $(r\le n)$

$$|\Omega| = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P^n_r$$

والعناصر هنا مختلفة وندعو هذه العينة نسقاً من الحجم r مأخوذاً من B

٤- المتبادلات:

يُدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متبادلة) حيث نفرض أنه لدينا n شيء متمايز ونريد اختيار r شيئاً منها $(r\le n)$ ثم ترتيبها في متبادلة، فيكون عدد الطرائق الممكنة المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!} \ ; \ r\le n$$

وعندما يكون $n=r$ أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرائق المختلفة لإنجاز هذا العمل هو

$$P^n_n = n(n-1)\dots 3.2.1 = n!$$

مثال:

بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق؟

الحل:

$|\Omega| = n^n$ طريقة

مثال:

لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا، ولكن لا يتوفر سوى أربعة أماكن، بكم طريقة مختلفة يمكن شغل هذه الأماكن الأربعة بأربعة أجزاء نختارها من الأجزاء الستة؟

الحل:

$$|\Omega| = P^6_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 360$$

المتوافقات

إنّ العديد من المواقف في العد تقتضي أن لا نأخذ ترتيب العناصر في الأنساق، فإذا كان لدينا مجموعة B عدد عناصرها n وأردنا اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً $(r\le n)$ فنقول عندئذٍ إن ذلك يدعى (متوافقة حجمها r) مأخوذة من B ونرمز لها بـ $\binom{n}{r}$ أو C^n_r

$$C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ملاحظات:

1) اصطلاحاً نضع $0! = 1$, $1! = 1$

2) بسهولة نجد $C^n_0 = 1$, $C^n_n = 1$, $C^n_1 = n$

$C^n_{n-1} = n$

3) بالحساب نجد

$$C^n_r = C^n_{n-r} \quad , \quad C^{n+1}_r = C^n_r + C^n_{r-1}$$

4) إن عدد الطرق التي يمكن تقسيم n شيئاً متمايزاً إلى قسمين أحدهما يتضمن n_1 شيئاً والآخر n_2 شيئاً حيث $n=n_1+n_2$ هو

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!} = C^n_{n_1} = C^n_{n_2}$$ ونرمز له $C^n_{n_1,n_2}$

ويمكن تعميم ذلك من أجل تقسيم المجموعة المؤلفة من n عنصر إلى k قسم الأول يتضمن n_1 عنصر والثاني n_2 حتى القسم k يتضمن n_k عنصر فيكون عدد الطرق لهذا التقسيم هو $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$ ونرمز له بـ $C^n_{n_1,\dots,n_k}$

مثال:

إن عدد الطرائق الممكنة لتوزيع r كرة في n صندوق بحيث أن الصندوق i يحوي r_i كرة حيث $1\le i\le n$ يكون

$$|\Omega| = C^{r}_{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$$

مثال.

إن عدد طرائق اختيار ثلاثة كتب من 7 كتب لترتيبها على رف هو

$$|\Omega| = C^7_3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

مثال.

بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث طالبات من مجموعة تحوي 5 طالبات

الحل.

$$|\Omega| = C^5_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} = 10$$

تمرين..

يوجد في صف سبعة طلاب وخمس طالبات والمطلوب

أ) كم عدد الطرق التي يمكن أن يختار بها المدرس لجنة مكونة من أربعة من هذا الصف

ب) بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة وثلاثة طلاب وما احتمال ذلك

ج) بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبتين وما احتمال ذلك

د) بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة واحدة على الأقل وما احتمال ذلك

هـ) بكم طريقة منها يوجد في اللجنة طالب واحد على الأكثر وما احتمال ذلك

و) بكم طريقة تكون اللجنة من جنس واحد (الجميع طلاب أو طالبات) وما احتمال ذلك

الحل.

أ) بفرض Ω مجموعة جميع اللجان المؤلفة من أربعة أشخاص

$$|\Omega| = C^{12}_4 = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495 \text{ لجنة}$$

ب) بفرض A الحدث الدال على أن اللجنة مؤلفة من طالبة وثلاثة طلاب عند ذلك فإن

$$|A| = C^5_1 \cdot C^7_3 = 5 \times \frac{7!}{3!\,4!} = 5 \times \frac{7\times6\times5}{3!\,4!} = 175$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{175}{495} = 0{,}353$$

ج) بفرض B الحدث الدال على أن اللجنة مؤلفة من طالبتين وطالبين

$$|B| = C^5_2 \cdot C^7_2 = 210$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{210}{495} = 0{,}424$$

د) الحدث C يدل على أن اللجنة مؤلفة من طالبة واحدة على الأقل

وهنا لدينا أربع حالات

إما طالبة أو 2 أو 3 أو 4

$$|C| = C^5_1 \cdot C^7_3 + C^5_2 \cdot C^7_2 + C^5_3 \cdot C^7_1 + C^5_4 \cdot C^7_0$$

$$= 175 + 210 + 70 + 5 = 460 \text{ طريقة}$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{460}{495} = 0{,}929$$

هـ) D الحدث الدال على أن اللجنة مؤلفة من طالب واحد على الأكثر، هنا لدينا حالتين إما ولا طالب أو طالب واحد

$$|D| = C^5_4 \cdot C^7_0 + C^5_3 \cdot C^7_1$$

$$= 5 + 70 = 75$$

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{75}{495} = 0{,}151$$

و) E حدث اللجنة من جنس واحد

لدينا حالتين: إما اللجنة طلاب أو طالبات

$$|E| = C^5_0 \cdot C^7_4 + C^5_4 \cdot C^7_0 = 35 + 5 = 40$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{40}{495} = 0{,}08$$

المحاضرة الرابعة

خاصة الفرق التناظرية :

$A\Delta B = (A/B)\cup(B/A) \Rightarrow$

$p(A\Delta B) = p[(A/B)\cup(B/A)]$

$p(A\Delta B) = p[(A\cap \bar{B})\cup(B\cap \bar{A})]$

وبما أن $(A\cap\bar{B})$ و $(B\cap \bar{A})$ حدثين متنافيين فإن

$$p(A\Delta B)=p(A\cap\bar{B})+p(B\cap\bar{A})$$
$$= p(A/(A\cap B)) + p(B/(A\cap B))$$
$$= [p(A)-p(A\cap B)] + [p(B)-p(A\cap B)]$$
$$\Rightarrow p(A\Delta B) = p(A)+p(B)-2p(A\cap B)$$

متباينات احتمالية :

ملاحظة : وجدنا أن

$p(A_1\cup A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1\cap A_2)$

و $p(A_1\cap A_2)\geq 0$

وبالتالي $p(A_1\cup A_2)\le p(A_1)+p(A_2)$

ويمكن تعميم هذه الخاصة بالشكل التالي

مبرهنة (1)

إذا كانت $(A_i)_{i\ge1}$ متتالية معدودة من الأحداث من F

عندئذ فإن $p(\bigcup_{i\ge1} A_i)\le\sum_{i\ge1}p(A_i)$

البرهان:

لنشكل الأحداث التالية :

$B_1=A_1 ,\ B_2=A_2/A_1 ,\ B_3=A_3/(A_1\cup A_2)$

$= A_n/(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i)$

نلاحظ أن الأحداث $(B_i)_{i\ge1}$ متنافية مثنى مثنى

أن $\bigcup_{i\ge1}B_i=\bigcup_{i\ge1}A_i$ وأن $B_n\subseteq A_n$

وبالتالي :

$p(\bigcup_{i\ge1}A_i)=p(\bigcup_{i\ge1}B_i)=\sum_{i\ge1}p(B_i)$

وبما أن $B_n\subseteq A_n \Leftarrow p(B_n)\le p(A_n)$

وبالتعويض في (1) نجد

$p(\bigcup_{i\ge1}A_i)=\sum_{i\ge1}p(B_i)\le\sum_{i\ge1}p(A_i)\Rightarrow$

$p(\bigcup_{i\ge1}A_i)\le \sum_{i\ge1}p(A_i)$

مبرهنة (2)

$p(\bigcap_{i\ge1}A_i)\ge 1-\sum_{i\ge1}p(\bar{A}_i)$

البرهان :

$p(\bigcap_{i\ge1}A_i)=1-p(\overline{\bigcap_{i\ge1}A_i})=1-p(\bigcup_{i\ge1} \bar{A}_i)$ *

وحسب المبرهنة السابقة لدينا

$p(\bigcup_{i\ge1} \bar{A}_i)\le\sum_{i\ge1} p(\bar{A}_i)$

وبالتالي

$1-p(\bigcup_{i\ge1}\bar{A}_i)\ge 1-\sum_{i\ge1} p(\bar{A}_i)$

وبالتالي بالتعويض في (*) نجد

$p(\bigcap_{i\ge1} A_i)=1-p(\bigcup_{i\ge1} \bar{A}_i)\Rightarrow$

$p(\bigcap_{i\ge1} A_i)\ge1-\sum_{i\ge1} p(\bar{A}_i)$

مبرهنة (3) (الاطراد المتزايد)

إذا كانت $(A_n)_{n\ge1}$ متتالية متزايدة من الأحداث F أي

أن $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots A_n\dots$ فإن

$p(\bigcup_{n\ge1}A_n)=\lim_{n\to\infty}p(A_n)$ (تسمى خاصة الاستمرار من الأدنى)

البرهان:

يمكن أن نكتب الاجتماع بالشكل

$\bigcup_{n\geq1} A_n = A_1 \cup (A_2/A_1) \cup (A_3/A_2) \cup \dots \cup (A_n/A_{n-1}) \cup \dots$

نلاحظ أن الأحداث $(A_i/A_{i-1})_{i\geq1}$ متنافية مثنى مثنى وبالتالي

$p(\bigcup_{n\geq1} A_n) = p(A_1)+p(A_2/A_1)+\dots+p(A_n/A_{n-1})+\dots$

$p(\bigcup_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to\infty}\left[p(A_1)+p(A_2/A_1)+\dots p(A_n/A_{n-1})\right]$ (*)

ولكن لدينا:

$A_n = A_1\cup(A_2/A_1)\dots\cup(A_n/A_{n-1})$ وهذه

الأحداث متنافية مثنى مثنى وبالتالي

$p(A_n)=p(A_1)+p(A_2/A_1)+\dots p(A_n/A_{n-1})+\dots$

وبالتعويض $p(A_n)$ بالعلاقة (*) نجد

$p(\bigcup_{n\geq1} A_n)=\lim_{n\to\infty} p(A_n)$

مبرهنة (4) (مبرهنة الاطراد المتناقص)

إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة باطراد من

الأحداث F أي: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$

عندئذٍ فإن $p(\bigcap_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to\infty} p(A_n)$

(تسمى خاصية الاستمرار من الأعلى)

البرهان:

علماً أن $A_1\supseteq A_2 \supseteq\dots A_n\supseteq$ فإن

$\bar A_1 \subseteq \bar A_2 \subseteq \dots \subseteq \bar A_n \subseteq\dots$

وحسب المبرهنة الاطراد المتزايدة نجد أن:

$p(\bigcup_{n\geq1} \bar A_n)=\lim_{n\to\infty} p(\bar A_n)$ ... (*)

ولكن حسب دومورغان يكون

$p(\bigcup_{n\geq1} \bar A_n) = p(\overline{\bigcap_{n\geq1} A_n})$

$p(\bigcup_{n\geq1} \bar A_n) = 1-p(\bigcap_{n\geq1} A_n)$ ... (1)

ولدينا أيضاً

$p(\bar A_n)=1-p(A_n)$ .... (2)

نعوض (2)، (1) في (*) نجد

$1-p(\bigcap_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to\infty}\left[1-p(A_n)\right]$

$\Rightarrow 1-p(\bigcap_{n\geq1} A_n)=1-\lim_{n\to\infty} p(A_n)$

$\Rightarrow p(\bigcap_{n\geq1} A_n)=\lim_{n\to\infty} p(A_n)$

خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي

إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية متزايدة أو متناقصة من الأحداث

من F فإن: $p(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} p(A_n)$

مبرهنة (دون برهان)

ليكن (Ω, F, p) فضاء احتمالي عندئذٍ الشروط التالية متكافئة

1. قياس احتمالي جمعي: أي إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية من الأحداث المتنافية مثنى مثنى من F فإن $P(\bigcup_{n\geq1} A_n)=\sum_{n\geq1} p(A_n)$
2. إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية متزايدة من F فإن $p(\bigcup_{n\geq1} A_n)=\lim_{n\to\infty} p(A_n)$
3. إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة من F فإن $p(\bigcap_{n\geq1} A_n)=\lim_{n\to\infty} p(A_n)$
4. إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة من F وكانت $\bigcap_{n\geq1} A_n=\emptyset$ فإن $\lim_{n\to\infty} p(A_n)=0$

تمرين:

مؤسسة تجارية تستخدم عمالاً من المدينة ومن خارجها، فإذا كان 60% من العمال إناثاً و 30% من العمال من المدينة وواحد من العمال من كل أربعة عمال هو من الذكور من المدينة والمطلوب: عين نسبة الإناث العاملات من خارج المدينة في هذه المؤسسة؟

الحل: ليكن A الحدث الدال على أن العامل من الإناث $p(A)=0.60$

وليكن B الحدث الدال على أن العامل من الذكور $p(B)=1-p(A)=0.40$

وليكن C الحدث الدال على أن العامل من المدينة ويكون $p(C)=0.30$

وليكن D الحدث الدال على أن العامل من خارج المدينة $p(D)=0.70$

ولدينا $p(C\cap B)=0.25$ والمطلوب هو $p(A\cap D)=?$

لدينا: الإناث إما من المدينة أو من خارج المدينة أي

$p(A)=p(A\cap C)+p(A\cap D) \Rightarrow p(A\cap D)=p(A)-p(A\cap C)$

$(A\cap C)=[C/(C\cap B)] \Rightarrow p(A\cap C)=p(C)-p(C\cap B)$

$\Rightarrow p(A\cap D)=p(A)-[p(C)-p(C\cap B)]$

$\Rightarrow P(A\cap D)=0.60-0.30+0.25=0.55$

SUBJECT: / /

المحاضرة الخامسة

تمرين ١ ..

سحبنا عينة عشوائية حجمها r من مجموعة عدد عناصرها n ، عين احتمال وجود عنصر معين في العينة إذا كان السحب

1) مع الإعادة
2) بدون إعادة
3) إذا تم السحب مع الإعادة، عين احتمال ظهور كل عنصر مرة على الأكثر.

الحل .

1) بفرض A الحدث الدال على وجود عنصر معين في العينة المسحوبة فيكون $\bar{A}$ الحدث المتمم له وهو عدم وجود عنصر في العينة المسحوبة

في هذه الحالة لدينا

$$|\Omega| = n^r \ , \ |\bar{A}| = (n-1)^r$$

$$\Rightarrow p(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^r}{n^r}$$

وبالتالي

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$
$$= 1 - \frac{(n-1)^r}{n^r} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$$

2) ليكن B الحدث المطلوب، فيكون $\bar{B}$ الحدث الدال على عدم ظهور عنصر معين في العينة فيكون لدينا

$$|\Omega| = P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$|\bar{B}| = P^{n-1}_r = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}$$

$$p(\bar{B}) = \frac{|\bar{B}|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!\,(n-r)!}{(n-1-r)!\ n!} = \frac{n-r}{n} = 1 - \frac{r}{n}$$

$$\Rightarrow p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \left(1 - \frac{r}{n}\right) = \frac{r}{n}$$

3) ليكن C الحدث المطلوب فيكون

$$|\Omega| = n^r \ , \ |C| = P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$p(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{n!}{n^r (n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n \cdot n \cdot n \cdots n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$$

تمرين (2)

سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من بين 10 ورقات مرقمة من 1 إلى 10.

أوجد احتمال أن يكون مجموعهما زوجياً إذا تم السحب

1) للورقتين معاً
2) ورقة بعد الأخرى بدون إعادة
3) ورقة بعد الأخرى مع الإعادة.

الحل .

1) ليكن A حادثة الحصول على مجموع زوجي فيكون

$$|\Omega| = C^{10}_2 = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = 45$$

$$|A| = C^5_1 \cdot C^5_1 = 5 \times 5 = 25$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9} = 0,56$$

2) $|\Omega| = C^{10}_1 \, C^9_1 = 10 \times 9 = 90$

$$|A| = C^5_1 C^5_1 + C^5_1 C^5_1 = 5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{50}{90} = 0,56$$

3) $|\Omega| = C^{10}_1 \, C^{10}_1 = 10 \times 10 = 100$

$$|A| = C^5_1 \cdot C^5_1 + C^5_1 \cdot C^5 =$$
$$5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$$

$p(A) = \frac{50}{100} = 0,5$

تمرين:

مصعد في بناء مؤلف من عشرة طوابق بدأنا بالصعود به سبعة أشخاص وافترضنا أنه يتوقف عند كل طابق

عين احتمال نزول كل من هؤلاء في طابق

الحل:

ليكن A الحدث المطلوب

$|\Omega| = (10)^7 = 10000000$ حالة

$|A| = P^{10}_{7} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 604800$

$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{604800}{10000000} = 0,06048$

تمرين:

خضع ربيع لاختبار وكان عليه أن يجيب عن عشرة من بين ثلاثة عشر سؤالاً

المطلوب

1) كم عدد الاختيارات الممكنة

2) بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كان لابد أن يجيب عن أول سؤالين

3) كم عدد الاختيارات إذا كان من الضروري أن يجيب عن السؤال الأول أو الثاني وليس الاثنين معاً

4) بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا ألزم بالإجابة عن 3 أسئلة من بين الأسئلة الخمسة الأولى

5) بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا أُلزم بالإجابة عن 3 أسئلة على الأقل من بين الأسئلة الخمسة الأولى

الحل:

1) $|\Omega| = C^{13}_{10} = 286$ اختيار

2) لابد من الإجابة عن أول سؤالين وبالتالي عدد الطرق الممكنة هو

$C^{11}_{8} = 165$

3) لدينا حالتين

أ) اختيار أحد السؤالين الأول والثاني لا الاثنين معاً

$C^{2}_{1} = 2$

ب) اختيار 9 أسئلة من الـ 11 سؤال

$C^{11}_{9} = 55$

وبالتالي عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة هو

$C^{2}_{1} \times C^{11}_{9} = 2 \times 55 = 110$

4) المرحلة الأولى:

اختيار 3 أسئلة من 5 أسئلة

$C^{5}_{3} = 10$

المرحلة الثانية:

اختيار 7 أسئلة من 8 أسئلة

$C^{8}_{7} = 8$

فيكون عدد الطرق الكلية هو

$C^{5}_{3} \times C^{8}_{7} = 10 \times 8 = 80$

5) نفرض أن

H_1 اختيار 3 أسئلة من 5 الأسئلة الأولى

H_2 اختيار 4 أسئلة من 5 الأسئلة الأولى

H_3 اختيار 5 أسئلة من 5 الأسئلة الأولى

ونفرض H اختيار 3 أسئلة على الأقل من 5 الأسئلة الأولى فيكون

$|H| = |H_1| + |H_2| + |H_3|$

$H_1 = C^{5}_{3} \times C^{8}_{7} = 10 \times 8 = 80$

$|H_2| = C^5_4 \times C^8_6 = 5\times 28 = 140$

$|H_3| = C^5_5 \times C^8_5 = 1\times 56 = 56$

وبالتالي عدد الطرق الممكنة هو

$|H| = 80 + 140 + 56 = 276$

تمرين 4. هامة جداً

توجد عشرة نقاط $M_1, M_2, \dots, M_{10}$ في المستوي بحيث لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة والمطلوب

1) كم عدد المستقيمات التي تحددها هذه النقاط العشر

3) كم عدد المثلثات التي رؤوسها من هذه النقاط

2) كم مستقيماً لا يمر بالنقطة M_1 و M_2

4) كم مثلثاً يقبل النقطة M_1 أحد رؤوسه

5) كم مثلثاً يقبل الضلع M_1M_2 أحد أضلاعه.

الحل.

1) نعلم أن كل نقطتين تحددان مستقيماً وبالتالي عدد المستقيمات هو $C^{10}_2 = 45$

2) $C^8_2 = 28$

3) بما أنه ليس هناك أي 3 نقاط على استقامة واحدة فكل ثلاث نقاط تحدد مثلثاً وبالتالي المثلثات $C^{10}_3 = 120$

4) عدد المثلثات التي تقبل M_1 أحد رؤوسه هو $C^9_2 = 36$

5) عدد المثلثات التي تقبل M_1M_2 أحد أضلاعه $C^8_1 = 8$

المحاضرة السادسة

الاحتمال الشرطي والاستقلال العشوائي

تعريف الاحتمال الشرطي:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي وليكن A,B حدثين من F حيث $(P(A)>0)$ فإننا نعرف الاحتمال الشرطي لوقوع B علماً بأن A قد وقع بـ

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P(A)>0$$

نتيجة $P_A(B) = \frac{|A\cap B|}{|A|}$

مبرهنة..

إذا كان (Ω,F,P) فضاء احتمالي وكان $A\in F$ بحيث $P(A)>0$ فإن الاحتمال المشروط بـ A الذي يرمز له بـ (P_A) هو دالة الاحتمال على F

البرهان..

لنبرهن أن الدالة $P_A: F \to \mathbb{R}$ تحقق شروط كولموغوروف

1) $\forall B\in F: P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \geq 0$

لأن $P(A\cap B)\geq 0$, $P(A)\geq 0$

2) $P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) من أجل متتالية $(B_i)_{i\geq 1}$ من الحوادث المتنافية مثنى مثنى من F لدينا

$$P_A(\cup_{i\geq 1} B_i) = \frac{P(A\cap(\cup_{i\geq 1} B_i))}{P(A)} = \frac{P(\cup_{i\geq 1}(A\cap B_i))}{P(A)}$$

وبما أن $(B_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى فإن $(A\cap B)_{i\geq 1}$ أيضاً متتالية أحداث متنافية مثنى مثنى وبالتالي فإن

$$P_A\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right) = \frac{\sum_{i\geq 1} P(A\cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i\geq 1} \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}$$

$$= \sum_{i\geq 1} P_A(B_i)$$

نتيجة: بما أن الاحتمال P_A المشروط بـ A هو دالة احتمال فإنه يحقق كل الخواص التي تحققها دالة الاحتمال P

مثال..

صنفنا مئة شخص وفقاً للجنس (ذكر، أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض عمى الألوان (مصاب، غير مصاب) وكان

$|H_2| = C^5_4 \times C^8_6 = 5\times 28 = 140$

$|H_3| = C^5_5 \times C^8_5 = 1\times 56 = 56$

وبالتالي عدد الطرق الممكنة هو

$|H| = 80 + 140 + 56 = 276$

تمرين 4. هامة جداً

توجد عشرة نقاط $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ في المستوي بحيث لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة والمطلوب.

1) كم عدد المستقيمات التي تحددها هذه النقاط العشر

3) كم عدد المثلثات التي رؤوسها من هذه النقاط

2) كم مستقيماً لا يمر بالنقطة M_1 و M_2

4) كم مثلثاً يقبل النقطة M_1 أحد رؤوسه

5) كم مثلثاً يقبل الضلع M_1M_2 أحد أضلاعه

الحل.

1) نعلم أن كل نقطتين تحددان مستقيماً وبالتالي عدد المستقيمات هو $C^{10}_2 = 45$

2) $C^8_2 = 28$

3) بما أنه ليس هناك أي 3 نقاط على استقامة واحدة فكل ثلاث نقاط تحدد مثلثاً وبالتالي عدد المثلثات $C^{10}_3 = 120$

4) عدد المثلثات التي تقبل M_1 أحد رؤوسه هو $C^9_2 = 36$

5) عدد المثلثات التي تقبل M_1M_2 أحد أضلاعه $C^8_1 = 8$

المحاضرة السادسة

الاحتمال الشرطي والاستقلال العشوائي

تعريف الاحتمال الشرطي:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي وليكن A,B حدثين من F حيث $(P(A)>0)$ فإننا نعرف الاحتمال الشرطي لوقوع B علماً بأن A قد وقع ب

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \ ; \ P(A)>0$$

نتيجة: $P_A(B) = \frac{|A\cap B|}{|A|}$

مبرهنة.

إذا كان (Ω,F,P) فضاء احتمالي وكان $A\in F$ بحيث $P(A)>0$ فإن الاحتمال المشروط ب A الذي يرمز له ب (P_A) هو دالة الاحتمال على F

البرهان.

لنبرهن أن الدالة $P_A: F \to \mathbb{R}$ تحقق شروط كولموغوروف

1) $\forall B\in F: P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \geq 0$

لأن $P(A\cap B)\geq 0$, $P(A)\geq 0$

2) $P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) من أجل متتالية $(B_i)_{i\geq 1}$ من الحوادث المتنافية مثنى مثنى من F لدينا

$$P_A(\cup_{i\geq1} B_i) = \frac{P(A\cap(\cup_{i\geq1}B_i))}{P(A)} = \frac{P(\cup_{i\geq1}(A\cap B_i))}{P(A)}$$

بما أن $(B_i)_{i\geq1}$ متنافية مثنى مثنى فإن $(A\cap B)_{i\geq1}$ أيضاً متتالية أحداث متنافية مثنى مثنى وبالتالي فإن

$$P_A\left(\bigcup_{i\geq1} B_i\right) = \frac{\sum_{i\geq1} P(A\cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i\geq1}\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}$$

$$= \sum_{i\geq1} P_A(B_i)$$

نتيجة: بما أن الاحتمال P_A الاحتمال المشروط ب A هو دالة احتمال فإنه يحقق كل الخواص التي تحققها دالة الاحتمال P

مثال.

صنفنا مئة شخص وفقاً للجنس (ذكر، أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض عمى الألوان (مصاب، غير مصاب) وكان

SUBJECT: ______ / /

لدينا النتائج التالية..

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	2	58	60
أنثى	1	39	40
المجموع	3	97	100

اخترنا عشوائياً شخصاً ما، المطلوب:

1- إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان ذكراً فما احتمال أن يكون مصاباً

2- إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان مصاباً فما احتمال أن يكون ذكراً

الحل..

1- نفرض أنَّ A الحدث الدال على أن الشخص مصاباً ونفرض B الحدث الدال على أن الشخص ذكراً

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{2}{60} = 0.03$$

طريقة أخرى..

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{60} = 0.03$$

2- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{2}{3} = 0.6$

قاعدة الاحتمال المركب..

نستنتج من تعريف الاحتمال الشرطي

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة من أجل متتالية من الأحداث $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ بالشكل

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{\bigcap A_i}(A_n)$$

مثال..

صندوق يحوي n كرة زرقاء، m كرة سوداء سحبنا على التالي كرتين بدون إعادة، عين احتمال الحصول على كرتين سوداوتين؟

الحل..

نفرض A الكرة الأولى المسحوبة سوداء، نفرض B الكرة الثانية المسحوبة سوداء، المطلوب إيجاد هو

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{C_1^m}{C_1^{n+m}} \cdot \frac{C_1^{m-1}}{C_1^{n+m-1}} = \frac{m}{(m+n)} \cdot \frac{m-1}{(m+n-1)}$$

تعريف التجزئة..

لتكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي ولتكن $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من الحوادث من F، نقول عن $(A_i)_{i \geq 1}$ إنها تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا حققت الشروط التالية:

1) $\forall i \; A_i \neq \emptyset$ 2) $\forall i, j \geq 1, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ 3) $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \Omega$

نتائج..

1- إذا كانت الأحداث $(A_i)_{i \geq 1}$ تشكل تجزئة لـ Ω فإن $P(\Omega) = P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} P(A_i) = 1$ كون (A_i) متنافية متنى متنى تدعى هذه القاعدة بقاعدة الاحتمال المركب

2- إن أي تجزئة لـ Ω تؤدي إلى تجزئة لأي حدث متعلق بالتجزئة ذاتها فإذا كانت $(A_i)_{i \geq 1}$ تجزئة لـ Ω وكان B حدثاً متعلقاً بها فإن $(B \cap A)_{i \geq 1}$ تشكل تجزئة لـ B

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \bigcup_{i \geq 1} (B \cap A)$$

$$\Rightarrow P(B) = P\left(\bigcup_{i \geq 1} (B \cap A)\right) = \sum_{i \geq 1} P(B \cap A)$$

دستور بايز..

لتكن $(A_i)_{i \geq 1}$ تجزئة لـ Ω في الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) وليكن B حدثاً متعلقاً بهذه التجزئة فإن دستور بايز يعطى بالعلاقة

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i \geq 1} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}$$

يدعى دستور بايز أو احتمال السبب أي أنه إذا وقع الحدث B فما هو احتمال أن يكون الجزء A_i (من التجزئة $(A_i)_{i \geq 1}$) هو السبب في وقوعه

الإثبات:

حسب قاعدة الاحتمال المركب والتجزئة فإن

$$P(B) = \sum_{i \geq 1} P(A_i \cap B) = \sum_{i \geq 1} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{i \geq 1} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}$$

SUBJECT:

المحاضرة السابعة

الاستقلال العشوائي

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالياً

1) لتكن A, B من F، نقول عن الحدثين A, B أنهما مستقلان عشوائياً إذا كانا يحققان الشرط التالي

$$p(A \cap B) = p(A) . p(B)$$

2) إذا الأحداث A_1, A_2, A_3 من F، فإننا نقول عن هذه الأحداث إنها مستقلة عشوائياً إذا كانت تحقق الشرطين التاليين

1- الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة مثنى مثنى

2- $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) . p(A_2) . p(A_3)$

3- نقول عن متتالية من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من F إنها مستقلة عشوائياً إذا كانت تحقق الشرطين التاليين

أ- كل متتالية جزئية منها من المرتبة $(n-1)$ تكون مستقلة عشوائياً

ب- $p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$

نتائج:

1) من تعريف الاستقلال ينتج أن

$p(A/B) = p(A)$ ($P_B(A)$)

$p(B/A) = p(B)$ ($P_A(B)$) : $p(A \cap B) = p(A) . P_A(B) = p(A) . p(B)$

أي أن استقلال حادثين يعني أنه إذا وقع أحدهما فليس لهذا أي علاقة بوقوع أو عدم وقوع الآخر ويمكن تعميم ذلك

2) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (حادثان متنافيان) فلكي يكونا مستقلين يجب أن يتحقق أن $p(A) = 0$

$p(B) = 0 \Leftarrow 0 = p(A) p(B) \Leftarrow p(A \cap B) = p(A)$

أي يجب أن يكون أحدهما على الأقل حادثاً مستحيلاً

ننوه هنا إلى أنه في حالة تنافي الأحداث نستخدم قاعدة الاحتمال الكلي يساوي مجموع الاحتمالات.

وفي حالة استقلال الأحداث نستخدم قاعدة التقاطع يساوي جداء الاحتمالات.

مثال:

صندوق يحوي تسع قطع من النقود، أربع منها من النوع الأول بتواريخ إصدار 1976، 1978، 1980، 1982 وثلاث منها من النوع الثاني بتواريخ إصدار 1976، 1980، 1982 واثنتان منها من النوع الثالث بتواريخ إصدار 1980، 1982. سحبنا قطعة نقود بصورة عشوائية، ولتكن A حادثة السحب من النوع الأول، و B حادثة السحب من النوع الثاني، و C حادثة سحب قطعة نقود إصدار 1980. والمطلوب حساب $p(C), P_A(C)$ ثم هل الحادثتان C, A مستقلتان؟ وهل الحادثتان C, B مستقلتان؟

الحل:

$$p(C) = \frac{3}{9}, \quad p(A \cap C) = \frac{1}{9}$$

$$P_A(C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = 0.33$$

$$p(A) . p(C) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{4}{27} \neq p(A \cap C) = \frac{1}{9}$$

$\Rightarrow$ A, C غير مستقلين

ولكن لدينا

$$p(B) \times p(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p(B \cap C) = \frac{1}{9} \; ; \; p(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

خواص الاستقلال العشوائي

1) الأحداث المستقلة عن نفسها هي الأحداث ~~المستحيلة~~ المستحيلة ~~والأكيدة~~ الأكيدة فقط

الإثبات:

$$p(A \cap A) = p(A) . p(A) = p^2(A)$$

$$\Rightarrow p(A) = p^2(A) \Rightarrow p(A) - p^2(A) = 0$$

SUBJECT: ____________ / /

$\Rightarrow p(A)(1 - p(A)) = 0$

$\Rightarrow p(A) = 0$

$1 - p(A) = 0 \Rightarrow p(A) = 1$

2) إنّ Ω , $\emptyset$ حدثان مستقلان عن أي حدث A من F $0 < p(A) < 1$

الإثبات.

$p(\emptyset \cap A) \overset{?}{=} p(\emptyset).p(A)$

$p(\emptyset \cap A) = p(\emptyset) = 0 = p(\emptyset).p(A)$

وبالتالي $\emptyset$, A مستقلان عشوائياً

$p(\Omega \cap A) \overset{?}{=} p(\Omega).p(A)$

$p(\Omega \cap A) = p(A) = 1.p(A) = p(\Omega).p(A)$

$\Leftarrow$ Ω , A مستقلان عشوائياً.

3) إذا كان A , B حدثين مستقلين عشوائياً فإن

أ) A , $\bar{B}$ مستقلان عشوائياً

ب) $\bar{A}$, B مستقلان

ج) $\bar{A}$, $\bar{B}$ مستقلان (العكس)

الإثبات.

أ) $p(A \cap \bar{B}) = p(A / (A \cap B))$

$= p(A) - p(A \cap B) \quad (A \cap B \subseteq A)$

$= p(A) - p(A).p(B) \quad$ (A , B مستقلان)

$= p(A)[1 - p(B)] = p(A).p(\bar{B})$

ب) $p(\bar{A} \cap B) = p(B / (A \cap B))$

$= p(B) - p(A \cap B)$

$= p(B) - p(A).p(B)$

$= p(B)[1 - p(A)]$

$= p(B).p(\bar{A})$

ج) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$

$= 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)]$

$= 1 - p(A) - p(B) + p(A).p(B)$

$= p(\bar{A}) - p(B)[1 - p(A)]$

$= p(\bar{A}) - p(B).p(\bar{A})$

$= p(\bar{A})[1 - p(B)] = p(\bar{A}).p(\bar{B})$

4) إذا كانت الأحداث $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ من F مستقلة عشوائياً فإن متمماتها $\bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \dots , \bar{A}_n$ تكون مستقلة عشوائياً.

5) لتكن $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من الأحداث متنافية مثنى مثنى من F وإذا كانت A_i , B مستقلة عشوائياً من أجل كل $i \geq 1$ عندئذٍ يكون الحدثين B , $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ مستقلين عشوائياً.

الإثبات.

$p((\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cap B) = p(\bigcup_{i \geq 1} (A_i \cap B))$

بما أن $(A_i)_{i \geq 1}$ متنافية مثنى مثنى فإن $(A_i \cap B)_{i \geq 1}$ متنافية مثنى مثنى وبالتالي

$p((\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cap B) = \sum p(A_i \cap B) = \sum_{i \geq 1} [p(A_i).p(B)]$

بما أن B , A_i مستقلين من أجل كل $i \geq 1$ $\Leftarrow$

$p((\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cap B) = p(B).\sum_{i \geq 1} p(A_i)$

وبما أن A_i متنافية مثنى مثنى فإن

$p((\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cap B) = p(B).p(\bigcup_{i \geq 1} A_i)$

وبالتالي B , $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ مستقلين عشوائياً

6) من أجل A , B حدثين من F يحققان الشرط التالي $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ عندئذٍ يكون A , B مستقلين عشوائياً

الإثبات.

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

أي B هو اجتماع حدثين متنافيين ومنه

$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

$= p(A).P_A(B) + p(\bar{A}).P_{\bar{A}}(B)$

وبما أن $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$ نجد

$p(B) = P_A(B)[p(A) + p(\bar{A})] = P_A(B).1$

وبالتالي حسب النتيجة (1) يكون B,A مستقلان عشوائياً

7) من أجل A, B, C من F وكان $A\subseteq B$ وكذلك كان A و C مستقلين وكان B و C مستقلين عندئذ يكون C و B/A مستقلين عشوائياً

الإثبات:

$$(B\setminus A)\cap C = (B\cap C)/(A\cap C)$$

$$\Rightarrow p((B\setminus A)\cap C) = p[(B\cap C)/(A\cap C)]$$

$$\overset{A\subseteq B}{=} p(B\cap C) - p(A\cap C)$$

$$= p(B).p(C) - p(A).p(C)$$

$$= [p(B)-p(A)].p(C)$$

$$= p(B/A).p(C)$$

$\Leftarrow$ C و B/A مستقلين عشوائياً.

8) إذا كان لدينا صفان من الأحداث F_1 ، F_2 نقول عن هذين الصفين أنهما مستقلان عشوائياً إذا كان كل حدث من F_1 مستقلاً عن كل حدث من F_2

فمثلاً من أجل A ، B من F ومستقلين عشوائياً يكون الصفين التاليين

$$F_1=\{\emptyset, A, \acute{A}, \Omega\} \quad , \quad F_2=\{\emptyset, B, \acute{B}, \Omega\}$$

مستقلين عشوائياً

9) إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقلة عشوائياً فعندئذ يكون

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - p\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - p\left(\bigcap_{i=1}^{n} \acute{A_i}\right)$$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p(\acute{A_i})$$

المحاضرة الثامنة

ملاحظة:

تصحيح الأحداث شبه المستحيلة وشبه الأكيدة ب (الأحداث المستحيلة والأكيدة)

الحدث شبه مستحيل: هو الحدث الذي يقترب احتماله من الصفر

الحدث الشبه الأكيد: هو الحدث الذي يقترب احتماله من الواحد

مثال:

تجربة إلقاء قطعة نقود حتى ظهور الصورة وبالتالي يكون (n عدد مرات التكرار حتى ظهور الصورة) $|\Omega| = 2^n$

والاحتمال المطلوب $\frac{1}{2^n}$ وهو قريب من الصفر من أجل n كبيرة

تمرين:

إذا كان احتمال أن يصيب ثلاثة رجال هدفاً هو على الترتيب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ فإذا أطلق كل منهم على الهدف مرة واحدة فالمطلوب

[1] عين احتمال أن يصيب الهدف رجل واحد منهم فقط

[2] إذا أصاب الهدف رجل واحد منهم فقط، عين احتمال أن يكون الأول هو الذي أصاب الهدف.

الحل:

ليكن A الحدث الدال على أن الرجل الأول هو الذي أصاب فيكون $p(A)=\frac{1}{6}$

ليكن B الحدث الدال على أن الرجل الثاني هو الذي أصاب فيكون $p(B)=\frac{1}{4}$

ليكن C الحدث الدال على أن الرجل الثالث هو الذي أصاب فيكون $p(C)=\frac{1}{3}$

وليكن E الحدث الدال على أن رجل واحد فقط أصاب الهدف فيكون

$$E=(A\cap\acute{B}\cap\acute{C})\cup(\acute{A}\cap B\cap\acute{C})\cup(\acute{A}\cap\acute{B}\cap C)$$

وبالتالي

$$p(E) = p(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + p(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) + p(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$$

$$= p(A).p(\bar{B}).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(B).p(\bar{C}) + p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(C)$$

$$\Rightarrow p(E) = \frac{1}{6}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} + \frac{5}{6}.\frac{1}{4}.\frac{2}{3} + \frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3}$$

$$p(E) = \frac{31}{72} = 0,43$$

[2] الحدث المطلوب $(A|E)$

$$P_E(A) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})}{P(E)} = \frac{P(A).P(\bar{B}).P(\bar{C})}{P(E)}$$

$$= \frac{6}{31} = 0,193$$

تمرين (2).

نرمي قطعة نقود بحيث يكون $p(H)=\frac{2}{3}$ و $p(T)=\frac{1}{3}$ ، ألقيت هذه القطعة مرة واحدة

نختار عدداً عشوائياً من 1 إلى 9 إذا ظهرت الصورة

نختار عدداً عشوائياً من 1 إلى 5 إذا ظهرت الكتابة.

عين احتمال أن يكون العدد المختار زوجياً.

الحل.

نفرض A الحدث الدال على اختيار عدد زوجي

وليكن E_1 الحدث الدال على اختيار عدد زوجي من 1 إلى 9 و

وليكن E_2 الحدث الدال على اختيار عدد زوجي من 1 إلى 5

والحدث المطلوب هو

الاستقلال

$$A = (H\cap E_1)\cup(T\cap E_2)$$

متنافيان

$$p(A) = p(H\cap E_1)\cup p(T\cap E_2)$$

$$= p(H).p(E_1) + p(T).p(E_2)$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{4}{9} + \frac{1}{3}.\frac{2}{5}$$

$$p(A) = 0,429$$

الفصل الثالث

دراسة المتغيرات العشوائية.

تعريف المتغير العشوائي:

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً

إن $X:\Omega\to\mathbb{R}$ تدعى متغيراً عشوائياً إذا حققت الشرط

$$\forall B\subseteq\mathbb{R} : X^{-1}(B)\in F$$

أي إن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وفق X هي حدث من F في Ω

ولكل متغير عشوائي مجموعة من القيم نرمزها R_X

ملاحظة.

1) إذا كان فضاء العينة مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة العد (معدودة) فنقول عن هذا الفضاء بأنه فضاء منفصل والمتغير العشوائي المولد منه متغيراً عشوائياً منفصلاً

مثال 1.

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة $\Omega=\{H,T\}$

وليكن X يأخذ القيمة (0) إذا ظهرت الصورة (H) والقيمة (1) إذا ظهرت الكتابة $R_X=\{0,1\}$

2) إذا كان فضاء العينة مجموعة غير منتهية وغير قابلة العد فنقول عن هذا الفضاء بأنه فضاء مستمر والمتغير العشوائي المولد منه متغير عشوائي مستمر

مثال 2.

تغيير مصباح كهربائي في حرم الجامعة $\Omega = R^+$

فإذا كان X يدل على عمر هذا المصباح فإن $R_X = R^+$

تذكير بعض خواص الصورة العكسية.

1. إذا كان $X: E\to F$ تطبيقاً وكان $B\subseteq F$ فإن $X^{-1}(B)=\{x : x\in E, X(x)\in B\}$

تدعى الصورة العكسية لـ B وفق X ونرمز لها ب
$X^{-1}(x) = [X=x]$ أي أن $[X\in B]$

خواص الصورة العكسية.

1) $[X\in \cup B_i] = \bigcup_i [X\in B_i]$

2) $[X\in \cap B_i] = \bigcap_i [X\in B_i]$

3) $[X\in B/A] = [X\in B]/[X\in A]$

$[X\in \bar{B}] = \overline{[X\in B]}$

$B\subseteq A \Rightarrow [X\in B]\subseteq[X\in A]$

$B\cap R_X = \emptyset \Rightarrow [X\in B]=\emptyset$

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل.

1- دالة الكثافة الاحتمالية.

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم التالية
$R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

إن مجموعة كل الأحداث الابتدائية $[w]$ من Ω والتي من أجلها يأخذ المتغير X القيمة x_i تشكل حدثاً نرمز له ب $[X=x_i]$ ولاحتمال هذا الحدث ب $p[X=x_i]$

$[X=x_i] = \{w : w\in\Omega : X(w)=x_i\}$

فإن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي يكون من أجلها $f(x_i)=p[X=x_i]$ حيث $i=1,2,\ldots,n$ تدعى بالدالة الاحتمالية X أو دالة الكثافة الاحتمالية X. هي تحقق الشروط التالية

1) $f_X(x_i)\ge 0 \; ; \; i=1,2,\ldots$

2) $\sum_{i=1} f_X(x_i) = 1$

ونصف هذه الدالة بجدول

X	x_1	x_2 ...	x_n ...	المجموع
$f_X(x_i)$	$f_X(x_1)$ $=p[X=x_1]$	$f_X(x_2)$ $p[X=x_2]$	$f_X(x_n)$ $p[X=x_n]$	1

مثال.

تجربة إلقاء ثلاث قطع نقود، وليكن X المتغير الدال على عدد الصور الحاصلة، عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X؟

الحل.

$\Omega = \{TTT, THT, THH, HTT, HTH, HHT, TTH, HHH\}$

$|\Omega| = 2^3 = 8$

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

ودالة الكثافة الاحتمالية توصف بالجدول

X	0	1	2	3	المجموع
$f_X(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$=1$

تعريف.

دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل.

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً على Ω، إن الدالة المعرفة بالشكل $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: F_X(x)=p[X\le x] \quad \forall x\in\mathbb{R}$ تدعى دالة التوزيع الاحتمالي لـ X

وفائدة دالة التوزيع تكمن في حساب احتمالات لـ X من الشكل

$$p[a<X\le b] = p[[X\le b]/[X\le a]] = p[X\le b]-p[X\le a] = F_X(b)-F_X(a)$$

إذا كانت $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية لـ X فإن $F_X(x) = \sum_{x_i\le x} f_X(x_i)$

وبالتالي من أجل $R_X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ فإن

SUBJECT:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \le x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 & x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

مثال:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^x & ; \quad x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين جدول الكثافة الاحتمالية لـ X ودالة التوزيع $F_X(x)$ واحسب $F(2,5)$ ؟

الحل:

X	0	1	2	3	المجموع
$f_X(x)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

نلاحظ أن

$$\sum_{i=1}^{4} f_X(x_i) = \frac{8+4+2+1}{15} = 1$$

وتكون دالة التوزيع

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \le x < (x_1 = 0) \\ \frac{8}{15} & 0 \le x < 1 \\ \frac{8}{15} + \frac{4}{15} & 1 \le x < 2 \\ \frac{14}{15} & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < +\infty \end{cases}$$

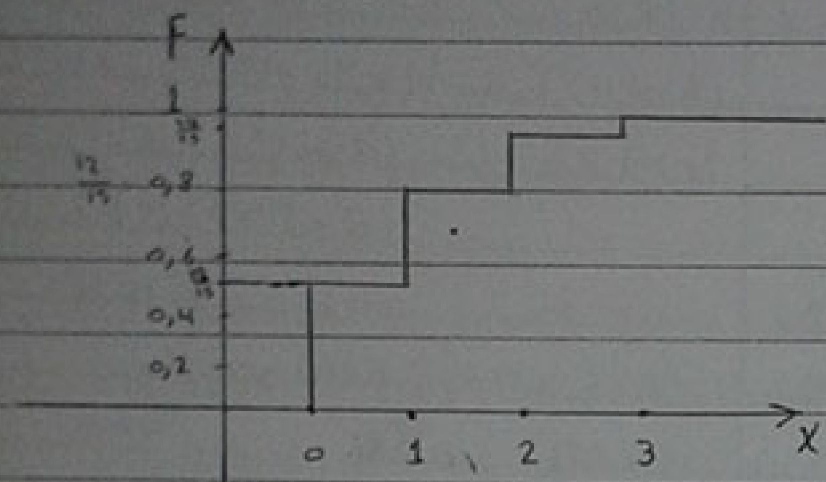
$$F(2,5) = P[X \le 2,5] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$$

أو من دالة التوزيع نجد أن $2 \le 2,5 < 3$ بالتالي

$$F(2,5) = \frac{14}{15}$$

ويلاحظ أن لدالة التوزيع F شكل درجي



SUBJECT: / /

تتمة محاضرة السادسة

مثال:

في دراسة لمحطة تلفزيونية حول نشرة الأخبار التي تعرضها، تم طرح سؤالين

1- هل تشاهد بانتظام نشرة الأخبار (نرمز له A)

2- هل نشرة الأخبار مشابه لأي نشرة أخبار أخرى في محطات أخرى (نرمز له B)

وكان لدينا النتائج

$p(A) = 0.40 \ , \ p(B) = 0.50$

$p(A \cap B) = 0.24$

والمطلوب حساب $P_A(B) , P_{\bar{A}}(B) , P_{\bar{A}}(\bar{B})$

الحل:

• $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.24}{0.40} = 0.6$

• $P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \ ; \ \bar{A} \cap B = B / (A \cap B)$

$p(\bar{A} \cap B) = p(B/(A \cap B)) = p(B) - p(A \cap B)$

$\Rightarrow P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.50 - 0.24}{1 - 0.40} = \frac{0.26}{0.60}$

$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0.43 = 0.57$

مثال:

لدى شخص 500 جهاز إرسال منهم 10 أجهزة معطلة عن العمل بدأ بفحص الأجهزة جهازاً جهازاً، عين احتمال أن يجد الشخص ثلاثة أجهزة صالحة للعمل يليها جهاز عاطل عن العمل.

الحل:

لتكن E_i حادثة الحصول على جهاز عاطل عن العمل حيث $i = 1, 2, 3, 4$ والحدث المطلوب هو

$\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap E_4$

حسب قاعدة الاحتمال المركب

$p(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap E_4) = p(\bar{E}_1) . P_{\bar{E}_1}(\bar{E}_2) . P_{\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2}(\bar{E}_3) . P_{\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3}(E_4)$

$= \frac{490}{500} \times \frac{489}{499} \times \frac{488}{498} \times \frac{10}{497} = 0.019$

مثال:

موظفان يقومان بنسخ الرسائل على الآلة الكاتبة فإذا كان الموظف الأول ينسخ 80% من الرسائل و 90% من رسائله خالية من الأخطاء والثاني ينسخ 20% من الرسائل و 50% من رسائله خالية من الأخطاء، اختيرت عشوائياً إحدى الرسائل المنسوخة

احسب احتمال أن تكون هذه الرسالة خالية من الأخطاء

وإذا كانت خالية من الأخطاء، احسب احتمال أن يكون الموظف الثاني هو الذي نسخها

الحل:

نفرض A_1 حدث كون الرسالة المختارة المنسوخة من قبل الموظف الأول

نفرض A_2 حدث كون الرسالة المختارة المنسوخة من قبل الموظف الثاني

نفرض B حدث كون الرسالة المختارة خالية من الأخطاء

لدينا هنا $B , A_1 \cup A_2 = \Omega$ حدث مرتبط بالتجربة

$p(B) = p(B \cap (A_1 \cap A_2))$

$= p(\underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)}_{\text{متنافيان}})$

$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2)$

$p(B) = p(A_1) . P_{A_1}(B) + p(A_2) . P_{A_2}(B)$

$p(B) = (0.80)(0.90) + (0.20).(0.50) = 0.82$

وحسب بايز

$P_B(A_2) = \frac{p(A_2) . P_{A_2}(B)}{p(B)} = \frac{(0.20)(0.50)}{0.82} = 0.122$

SUBJECT:

المحاضرة التاسعة

دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & -\infty \le x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 & x_n \le x \le +\infty \end{cases}$$

خواص دالة التوزيع المنفصل:

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ F_X(x) \geq 0$

2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \le x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

الإثبات

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \le x_2 \Rightarrow (X \le x_1) \subseteq (X \le x_2)$

$\Rightarrow P(X \le x_1) \le P(X \le x_2) \Rightarrow$

$F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

3. $F(+\infty) = P(X \le +\infty) = P(\Omega) = 1$

$(X \le +\infty) = \{w \in \Omega : X(w) \le +\infty\} = \Omega$

$F(-\infty) = P(X \le -\infty) = P(\emptyset) = 0$

$(X \le -\infty) = \{w \in \Omega : X(w) \le -\infty\} = \emptyset$

4. F مستمر من اليمين

أي يجب أن نبرهن حيث $F(x^+) = F(x)$

$F(x^+) = \lim_{n\to\infty} F(x+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x+\frac{1}{n})$

الإثبات:

نأخذ متتالية الأحداث $(B_n)_{n\geq 1}$ حيث $B_n = (X \le x+\frac{1}{n})$ ومنه

$B_1 = (X \le x+1),\ B_2 = (X \le x+\frac{1}{2}), \dots$

$B_n = (X \le x+\frac{1}{n}), \dots$

وبالتالي نجد أن: $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n \dots$ وهذه الأحداث $(B_n)_{n\geq 1}$ تشكل متتالية متناقصة من أجل قيم n ومنه: $\bigcap_{n\geq 1} B_n = (X \le x)$

$\Rightarrow F(x^+) = \lim_{n\to\infty} F(x+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x+\frac{1}{n})$

$\Rightarrow F(x^+) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

وحسب خاصية الاستمرار لدالة الاحتمال P فإن

$F(x^+) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\bigcap_{n\geq 1} B_n) = P(X \le x) = F(x)$

5. F غير مستمر من اليسار:

أي نبرهن أن $F(x^-) \neq F(x)$ حيث

$F(x^-) = \lim_{n\to\infty} F(x-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x-\frac{1}{n})$

الإثبات:

نأخذ متتالية الأحداث $(B_n)_{n\geq 1}$ حيث $B_n = (X \le x-\frac{1}{n})$ ومنه

$B_1 = (X \le x-1),\ B_2 = (X \le x-\frac{1}{2}), \dots B_n = (X \le x-\frac{1}{n})$

وبالتالي نجد أن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_n$ وهذه الأحداث $(B_n)_{n\geq 1}$ تشكل متتالية تزايدية من أجل قيم n ومنه $\bigcup_{n\geq 1} B_n = (X < x)$

$\Rightarrow F(x^-) = \lim_{n\to\infty} F(x-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x-\frac{1}{n})$

$\Rightarrow F(x^-) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

وحسب خاصية الاستمرار لدالة الاحتمال P فإن

$F(x^-) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = P(X < x) \neq F(x)$

SUBJECT: ______ / /

- نلاحظ من الخاصيتين السابقتين (5,4) أنّ

$$F(x^+) - F(x^-) = P(X \le x) - P(X < x) = P(X = x)$$

أي أنه إذا كان $P(X=x) > 0$ فإن:

F يعاني قفزة عند x مساوية لهذا الإحتمال

وإذا كان $P(X=x)=0$ فإن

$$F(x^+) = F(x^-) = F(x)$$

ويكون عندئذ X متغير عشوائي مستمر ومنه نقول عن المتغير العشوائي X إنه مستمر إذا كان

$$\forall x \in R;\ P(X=x)=0$$

ملاحظة هامة جداً:

إذا وضعنا في تعريف دالة التوزيع $F(x)=P(X<x)$ فإن F يصبح مستمر من اليسار وغير مستمر من اليمين.

نتائج:

1- $P(X>a) = 1 - F(a)$

2- $P(X \ge a) = 1 - P(X<a)$

$\Rightarrow P(X \ge a) = 1 - [P(X \le a) - P(X=a)]$

$\Rightarrow P(X \ge a) = 1 - P(X \le a) + P(X=a)$

$\Rightarrow P(X \ge a) = 1 - F(a) + P(X=a)$

3- $P(X \le b) = F(b)$

4- $P(X<b) = P(X \le b) - P(X=b)$

$\Rightarrow P(X<b) = F(b) - P(X=b)$

5- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

6- $P(a<X<b) = F(b) - F(a) - P(X=b)$

7- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X=a)$

8- $P(a \le X < b) = F(b) - F(a) - P(X=b) + P(X=a)$

دالة حدث:

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالي وليكن $A \in F$

نقول عن الدالة χ_A من Ω في R إنها دالة حدث إذا حققت الشرط

$$\forall w \in \Omega = \begin{cases} \chi_A(w) = 1 & ; w \in A \\ \chi_A(w) = 0 & ; w \notin A,\ w \in \bar{A} \end{cases}$$

وبالتالي إذا كانت χ_A دالة الحدث A، وكان $B \subset R$

$$\chi_A^{-1}(B) = (\chi_A \in B) = \begin{cases} A & \{1\} \in B,\ \{0\} \notin B \\ \bar{A} & \{0\} \in B,\ \{1\} \notin B \\ \Omega & \{0,1\} \in B \\ \emptyset & \{0,1\} \notin B \end{cases}$$

وبالتالي نستنتج أن دالة الحدث A الدالة (χ_A) هي متغير عشوائي منفصل مجموعة قيمه $\{0,1\}$ وعكس أن كل متغير عشوائي X يأخذ القيمتين $\{0,1\}$ يمثل دالة حدث والعكس صحيح

مثال:

ألقينا حجر نرد مرتين، وليكن X المتغير الدال على أكبر الوجهين الحاصلين، Z المتغير الدال على أصغر الوجهين الحاصلين، والمطلوب: عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X, Z ثم دالة توزيعهما؟

الحل:

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

X	1	2	3	4	5	6	المجموع
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \le x < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{36} & 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{36} & 3 \le x < 4 \\ \frac{16}{36} & 4 \le x < 5 \\ \frac{25}{36} & 5 \le x < 6 \end{cases}$$

$R_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Z	1	2	3	4	5	6	مجموع
$f_Z(z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & -\infty \le z < 1 \\ \frac{11}{36} & 1 \le z < 2 \\ \frac{20}{36} & 2 \le z < 3 \\ \frac{27}{36} & 3 \le z < 4 \\ \frac{32}{36} & 4 \le z < 5 \\ \frac{35}{36} & 5 \le z < 6 \\ 1 & 6 \le z < +\infty \end{cases}$$

المحاضرة العاشرة

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر

نقول عن دالة موجبة $f : R \to R^+$ إنها دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X إذا كان:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1}$$

ومن أجل دالة كثافة احتمالية لـ X نعرف دالة التوزيع الاحتمالي لـ X:

$$F_X(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

ملاحظة هامة:

1) X متقطع $\Leftarrow \sum x_i f_X(x_i)$

2) X مستمر $\Leftarrow \int f_X(x)dx$

نتائج وملاحظات

عندما X متغير عشوائي مستمر:

1) $F(x^+) = F(x^-) = F(x) = p(X \le x) = p(X < x)$

2) $p(a \le X \le b) = p(a < X \le b) = p(a \le X < b)$
$= p(a < X < b) = F(b) - F(a)$

3) النتيجتين (1،2) تنتجان من كون $p(X = x)$ في حالة الاستمرار.

4) $p(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f_X(x)dx$

5) إذا كانت A مجموعة جزئية من R فإن

$p(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$

6) إذا كانت F_X دالة توزيع لمتغير عشوائي مستمر X فإنه حسب لايبنتز نجد $F'_X(x) = f_X(x)$ من أجل كل نقطة x يكون عندها f مستمر

مثال:

ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & ; \; x \ge 0 \quad (\lambda \text{ ثابت موجب}) \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين λ لتكون $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X

2) عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ X ثم احسب $F(2.5)$

الحل:

1) لتكون $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X يجب أن يتحقق الشرطين:

- $f_X(x) \ge 0$ ، وهو محقق
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-x}dx$

$$\Rightarrow 1 = 0 + \lambda[-e^{-x}]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda[(-e^{-\infty})-(-e^{0})] \Rightarrow \lambda = 1$$

يكون

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2) من أجل $x < 0$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} (0)\,dt = 0$$

من أجل $x \geq 0$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow F_X(x) = 0 + [-e^{-t}]_0^{x} = 1 - e^{-x}$$

إذن دالة التوزيع الاحتمالي لـ X هي

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

$$F(2.5) = p(X \leq 2.5) = 1 - e^{-2.5} = 0.92$$

مثال (2).

لتكن الدالة

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & ; \quad 2 \leq x \end{cases}$$

1- برهن أن f دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X

2- عين دالة التوزيع $F_X(x)$ ثم احسب $F(0.8)$ ، $F(2.5)$ ، $p(0.5 \leq X \leq 1.5)$

الحل.

1) لدينا $f_X(x) \geq 0$ فرضاً ويكفي أن نبرهن أنّ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

ومن أجل ذلك لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,dx + \int_{2}^{+\infty} (0)\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x\right]_1^2 + 0 = 1$$

إذن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X

2) من أجل $x < 0$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} (0)\,dt = 0$$

من أجل $0 \leq x < 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

من أجل $1 \leq x < 2$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{x}{2}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,dt + \int_{2}^{x} (0)\,dt = 1$$

SUBJECT: ______________ / /

ومنه دالة التوزيع الاحتمالي $F_X(x)$ لـ X

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<0\\ \frac{x^2}{2} & ; \quad 0\le x<1\\ \frac{x}{2} & ; \quad 1\le x<2\\ 1 & ; \quad 2\le x\end{cases}$$

• $p(0.5\le X\le 1.5)=F(1.5)-F(0.5)$

$$=\frac{1.5}{2}-\frac{(0.5)^2}{2}=0.625$$

مثال (3)

ليكن X متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1} & ; \quad x>0\\ 0 & ; \quad x\le 0\end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X، تحقق من ذلك ثم عين c من أجل $p(X\le c)=\frac{1}{2}$

الحل.

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{(1)(1+x)-(1)(x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^2} & ; \quad x>0\\ 0 & ; \quad x\le 0\end{cases}$$

التحقق: لدينا $f_X(x)\ge 0$ ويجب أن نتحقق أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$=0+\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{\infty}=1$$

• $p(X\le c)=\frac{1}{2}\Rightarrow F(c)=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\frac{c}{c+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2c=c+1\Rightarrow c=1$$

أي أن $p(X\le 1)=\frac{1}{2}$

تمرين (1).

إذا علمت أن الطلب اليومي على مادة معينة في مخزن يمثل متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة:

X	0	1	2	3	4	5	6	6<
$f_X(x)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.1	0.05	0

والمطلوب:

1) برهن أن f دالة كثافة لـ X

2) عين دالة التوزيع الاحتمالي لـ X

3) احسب $p(X<2)$ و $p(X\geq 4)$

4) من أجل قيمة لـ X يمكن أن نكتب $p(X<x)=0.7$

5) من أجل قيمة لـ X يمكن أن نكتب $p(X\geq x)=0.3$

الحل

$$\sum_{x_i} f_X(x_i)=0.1+0.15+0.2+0.25+0.15+0.1+0.05+0=1$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \infty\le x<0\\ 0.1 & 0\le x<1\\ 0.25 & 1\le x<2\\ 0.45 & 2\le x<3\\ 0.70 & 3\le x<4\\ 0.85 & 4\le x<5\\ 0.95 & 5\le x<6\\ 1 & \end{cases}$$

SUBJECT: ____________ / /

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4)$$

$$= 1 - p[p(X \leq 4) - p(X = 4)]$$

$$= 1 - (F_X(4) - f_X(4)) = 1 - (0.85 - 0.15) = 0.3$$

$$p(X < 2) = p(X \leq 2) - p(X = 2)$$

$$= F_X(2) - f_X(2) = 0.45 - 0.2 = 0.25$$

4) من أجل $x = 4$ لدينا:

$$p(X < 4) = p(X \leq 4) - p(X = 4)$$

$$= F_X(4) - f_X(4) = 0.85 - 0.15 = 0.7$$

5) من أجل $x = 4$ لدينا:

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - 0.70 = 0.3$$

تمرين (2):

ليكن X متغير عشوائي له دالة الكثافة

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{9} & ; \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل $f_X(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية منفصلة

الحل:

$$\sum_{x_i} f_X(x_i) = \frac{(0-2)^2}{9} + \frac{(1-2)^2}{9}$$

$$+ \frac{(2-2)^2}{9} + \frac{(3-2)^2}{9}$$

$$+ \frac{(4-2)^2}{9} + \frac{(5-2)^2}{9}$$

$$\sum_{x_i} f_X(x_i) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9}$$

$$+ \frac{4}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9} \neq 1$$

إذن f ليست دالة كثافة احتمالية منفصلة

SUBJECT: ______ / /

المحاضرة الحادية عشر

تمرين

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} Kx^2 & x \in [0,3] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين K حتى تكون f دالة كثافة فعلية لـ X

2) عين دالة التوزيع الاحتمالية لـ X واحسب $P[1<X<2]$

الحل

1) يجب أن يتحقق $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^3 Kx^2\,dx = K\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= K\left(\frac{27}{3}\right) = 9K \Rightarrow K = \frac{1}{9}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & x \in [0,3] \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) من أجل $x \notin [0,3]$ يوجد حالتين

أ) $-\infty < x < 0$

ب) أو $3 < x < +\infty$

من أجل أ) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} (0)\,dt = 0$

ب) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_0^3 \frac{t^2}{9}\,dt + \int_3^x (0)\,dt$

إذن

$$F_X(x) = 0 + \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^3 + 0 = 1$$

- من أجل $x \in [0,3]$ فإن

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} (0)\,dt + \int_0^x \frac{t^2}{9}\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

إذن

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \le x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 \le x \le 3 \\ 1 & 3 < x \le +\infty \end{cases}$$

تمرين

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك } (x \le 0) \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وعين $P[X>10]$

الحل

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = e^{-x} \quad ; \quad x > 0$$

ومنه

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \le 0 \end{cases}$$

$$P[X>10] = 1 - P[X \le 10]$$
$$= 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10}) = e^{-10}$$

الفصل الرابع

دراسة المتجهات العشوائية

تعريف (المتجه العشوائي):

لتكن X_1 ، X_2 ، ...... X_n متغيرات عشوائية معرفة على (Ω, F, P) عندئذ يكون التطبيق

$$X_n = (X_1, X_2, \dots X_n) : (\Omega, F, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$$

$$w \longrightarrow (X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w))$$

متجهاً عشوائياً على (Ω, F, P) يقيم في $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$

وذلك لأنه من أجل $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \beta(R^n)$ لدينا ما يلي محقق

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{-1}(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n) = \{w : w \in \Omega,\ X_1(w) \in B_1,\ X_2(w) \in B_2, \ldots, X_n(w) = B_n\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(B_k) \in \mathcal{F}$$

لأن $X_1, \ldots, X_n$ هي متغيرات عشوائية وهذا العنصر العشوائي $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ يدعى متجه عشوائي نرمزه X_n

الأشعة (المتجهات) العشوائية الثنائية وتوزيعاتها الاحتمالية.

تعريف. إذا كان X, Y متغيران عشوائيان معرفان على $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فإننا نسمي الثنائية (X,Y) شعاعاً عشوائياً ثنائياً على Ω أي أنه نلحق بكل حدث إبتدائي $w \in \Omega$ قيمة (x,y) من R^2 لهذا الشعاع

تعريف.

نسمي الدالة $F_{X,Y}(x,y)$ المعرفة بالعلاقة

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \le x, Y \le y]$$

دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للشعاع العشوائي (X, Y)

- إن وقوع الحدث $[X \le x, Y \le y]$ يعني وقوع الحدثين $[X \le x]$ و $[Y \le y]$ معاً بآن واحد أي

$$P[X \le x, Y \le y] = P([X \le x] \cap [Y \le y])$$

- خواص دالة التوزيع المشتركة

1) $F(x,y)$ هي دالة غير متناقصة بالنسبة لكل من x و y ومستمرة على الأقل من اليمين

2) $F(-\infty, y) = 0$ ، $F(x, -\infty) = 0$

3) $F(+\infty, +\infty) = 1$

4) $F(x, +\infty) = F_X(x)$ ؛ $F(+\infty, y) = F_Y(y)$

حيث $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ دالتا التوزيع الاحتماليتين لـ X و Y على الترتيب وتدعيان دالتا التوزيع الهامشيتان لـ X و Y على الترتيب

5) $P[x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2] =$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

برهان (5)

$$P[x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2]$$

$$= P[X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2] - P[X \le x_1,\ y_1 < Y \le y_2]$$

$$= P[X \le x_2, Y \le y_2] - P[X \le x_2, Y \le y_1] - \left[P[X \le x_1, Y \le y_2] - P[X \le x_1, Y \le y_1]\right]$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

الأشعة العشوائية الثنائية المتقطعة.

تعريف: نقول عن الشعاع العشوائي (X, Y) إنه منقطع، إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها هذا الشعاع مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد

دالة الكثافة المشتركة:

بفرض أن مجموعة قيم X هي

$$R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$$

ومجموعة قيم Y هي

$$R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$$

تكون عندئذ مجموعة قيم الشعاع (X, Y) هي

$$R_{X,Y} = \{(x_i, y_j),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

- نقول إن الحدث $[(X,Y) = (x_i, y_j)]$ قد وقع إذا وقع كلا الحدثين $[X = x_i]$ و $[Y = y_j]$

معناه رمز لاحتمال وقوع هذا الحدث بـ

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = p[X = x_i , Y = y_j]$$

$i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$

وندعو الدالة $f_{X,Y}(x_i, y_j)$ دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائيان X , Y أو الشعاع (X, Y)

- يمكن التعبير عن هذه الدالة بجدول

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$-$ y_n	المجموع
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$f(x_1, y_n)$	$\sum_j f(x_1, y_j)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$f(x_2, y_n)$	$\sum_j f(x_2, y_j)$
$\vdots$				
x_m	$f(x_m, y_1)$ $\vdots$	$f(x_m, y_2)$ $\vdots$	$f(x_m, y_n)$ $\vdots$	$\sum_j f(x_m, y_j)$ $\vdots$
المجموع	$\sum_i f(x_i, y_1)$	$\sum_i f(x_i, y_2)$	$\sum_i f(x_i, y_n)$	1

. إن دالة الكثافة المشتركة تحقق الخواص

1) $0 \le f(x, y) \le 1 ; \ \forall x \in R_x , y \in R_y$

2) $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$

3) $p[(X, Y) \in A] = \sum \sum_{(x_i, y_j) \in R^2} f(x_i, y_j)$

A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$

المحاضرة الثانية عشر

دوال الكثافة الهامشية :

إذا كان (X, Y) شعاعاً عشوائياً متقطعاً دالة كثافته المشتركة $f(x_i, y_j)$ حيث $j = 1, 2, \dots , i = 1, 2, \dots$

فإن دالة الكثافة الهامشية لـ X معرفة بالشكل

$$f_X(x) = p(X = x_i) = \sum_{j \ge 1} f(x_i, y_j) ; \ i = 1, 2, \dots$$

ودالة الكثافة الهامشية لـ Y معرفة بالشكل

$$f_Y(y) = p(Y = y_j) = \sum_{i \ge 1} f(x_i, y_j) ; \ j = 1, 2, \dots$$

دالة التوزيع المشتركة.

تعرف بالشكل

$$F_{X,Y}(x, y) = p[X \le x , Y \le y] = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j)$$

مثال.

بفرض أن (X, Y) شعاعاً عشوائياً له جدول التوزيع التالي.

$X \backslash Y$	1	2	3	المجموع
4	$f(x_1, y_1) = 0.3$	$f(x_1, y_2) = 0.1$	$f(x_1, y_3) = 0.3$	$0.7 = \sum_{j=1}^{3} f(x_1, y_j)$
6	$f(x_2, y_1) = 0.1$	$f(x_2, y_2) = 0$	$f(x_2, y_3) = 0.2$	$0.3 = \sum_{j=1}^{3} f(x_2, y_j)$
المجموع	$0.4 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_1)$	$0.1 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_2)$	$0.5 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_3)$	$1 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} f(x_i, y_j)$

نلاحظ أن $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$

وأن دالة الكثافة الهامشية لـ X

X	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$	المجموع
$f_X(x)$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_1, y_j) = 0.7$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_2, y_j) = 0.3$	1

معاً ونرمز لاحتمال وقوع هذا الحدث بـ

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = p[X = x_i , Y = y_j]$$

$i = 1, \ldots, m$

$j = 1, \ldots, n$

وندعو الدالة $f_{X,Y}(x_i, y_j)$ دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية X, Y أو الشعاع (X, Y)

- يمكن التعبير عن هذه الدالة بجدول

$X \backslash Y$	y_1	y_2 -	y_n	المجموع
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$f(x_1, y_n)$	$\sum_j f(x_1, y_j)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$f(x_2, y_n)$	$\sum_j f(x_2, y_j)$
$\vdots$				
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$f(x_m, y_n)$	$\sum_j f(x_m, y_j)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
المجموع	$\sum_i f(x_i, y_1)$	$\sum_i f(x_i, y_2)$	$\sum_i f(x_i, y_n)$	1

. إن دالة الكثافة المشتركة تحقق الخواص

1) $0 \le f(x,y) \le 1; \quad \forall x \in R_x , y \in R_y$

2) $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$

3) $p[(X,Y) \in A] = \sum \sum_{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2} f(x_i, y_j)$

A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$

المحاضرة الثانية عشر

دوال الكثافة الهامشية:

إذا كان (X, Y) شعاعاً عشوائياً متقطعاً دالة كثافته المشتركة $f(x_i, y_j)$ حيث $i=1,2,\ldots ; j=1,2,\ldots$

فإن دالة الكثافة الهامشية لـ X معرفة بالشكل

$$f_X(x) = p(X = x_i) = \sum_{j \ge 1} f(x_i, y_j) ; \; i = 1, 2, \ldots$$

ودالة الكثافة الهامشية لـ Y معرفة بالشكل

$$f_Y(y) = p(Y = y_j) = \sum_{i \ge 1} f(x_i, y_j) ; \; j = 1, 2, \ldots$$

دالة التوزيع المشتركة تعرف بالشكل

$$F_{X,Y}(x,y) = p[X \le x , Y \le y] = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j)$$

مثال:

بفرض أن (X, Y) شعاعاً عشوائياً له جدول التوزيع التالي:

$X \backslash Y$	1	2	3	المجموع
4	$f(x_1, y_1) = 0.3$	$f(x_1, y_2) = 0.1$	$f(x_1, y_3) = 0.3$	$0.7 = \sum_{j=1}^{3} f(x_1, y_j)$
6	$f(x_2, y_1) = 0.1$	$f(x_2, y_2) = 0$	$f(x_2, y_3) = 0.2$	$0.3 = \sum_{j=1}^{3} f(x_2, y_j)$
المجموع	$0.4 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_1)$	$0.1 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_2)$	$0.5 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_3)$	$1 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} f(x_i, y_j)$

نلاحظ أن $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$

وأن دالة الكثافة الهامشية لـ X

X	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$	المجموع
$f_X(x)$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_1, y_j) = 0.7$	$\sum_{j=1}^{3} f(x_2, y_j) = 0.3$	1

وان دالة الكثافة الهامشية لـ Y هي

Y	$y_1=1$	$y_2=2$	$y_3=3$	المجموع
$f_Y(y)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_1) = 0.4$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i,y_2) = 0.1$	$\sum_{i=1}^{3} f(x_i,y_3) = 0.5$	1

$$F(5,2.5) = P[X \le 5, Y \le 2.5]$$

$$= \sum_{x_i \le 5} \sum_{y_j \le 2.5} f(x_i,y_j)$$

$$= f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) = f(4,1) + f(4,2)$$

$$= 0.3 + 0.1 = 0.4$$

$$F(7,2.5) = P[X \le 7, Y \le 2.5]$$

$$= \sum_{x_i \le 7} \sum_{y_j \le 2.5} f(x_i,y_j)$$

$$= f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_2,y_1) + f(x_2,y_2)$$

$$= f(4,1) + f(4,2) + f(6,1) + f(6,2)$$

$$= 0.3 + 0.1 + 0.1 + 0 = 0.5$$

$$F(2,5) = P[X \le 2, Y \le 5]$$

$$= P(\emptyset) = 0$$

$$F(7,4) = P[X \le 7, Y \le 4]$$

$$= \sum_{x_i \le 7} \sum_{y_j \le 4} f(x_i,y_j) = f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2)$$

$$+ f(x_1,y_3) + f(x_2,y_1) + f(x_2,y_2) + f(x_2,y_3)$$

مثال:

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً له دالة الكثافة المشتركة

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21} \; ; \; x = 1,2,3 \; , \; y = 1,2$$

1) هل هذه الدالة دالة كثافة فعلية

2) عين الكثافات الهامشية لـ X و Y

الحل:

1) يجب أن يتحقق الشرط $\sum_i \sum_j f(x_i,y_j) = 1$

$$\sum_i \sum_j f(x_i,y_j) = f(x_1,y_1) + f(x_1,y_2) + f(x_2,y_1)$$

$$+ f(x_2,y_2) + f(x_3,y_1) + f(x_3,y_2)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

إذن هي دالة كثافة فعلية مشتركة

2)

$$f_X(x) = \sum_j f(x_i,y_j) = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21} \; ; x = 1,2,3$$

$$f_Y(y) = \sum_i f(x_i,y_j) = \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21}$$

$$= \frac{6+3y}{21} = \frac{2+y}{7} \; ; \; y = 1,2$$

التأكد:

$$\sum_i f_X(x_i) = \frac{2(1)+3}{21} + \frac{2(2)+3}{21} + \frac{2(3)+3}{21}$$

$$= \frac{5+7+9}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

$$\sum_j f_Y(y_j) = \frac{2+1}{7} + \frac{2+2}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

تعريف: (استقلال متغيرين)

نقول عن المتغيرين العشوائيين X و Y إنهما مستقلان إذا تحقق الشرط

$$f(x,y) = f_X(x) \, f_Y(y)$$

SUBJECT: ________ / /

أو $F(x,y) = F_X(x) . F_Y(y)$

أو

$p[X \le x , Y \le y] = p[X \le x] . p[Y \le y]$

حيث دالة التوزيع الهامشية لـ X تعطى بالعلاقة

$$F_X(x) = p[X \le x] = \sum_{x_i \le x} \underbrace{\sum_j f(x_i , y_j)}_{f_X(x_i)}$$

والدالة الهامشية لـ Y

$$F_Y(y) = p[Y \le y] = \sum_{y_j \le y} \underbrace{\sum_i f(x_i , y_j)}_{f_Y(y_j)}$$

مثال

لتكن $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة لـ (X,Y)

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30} \; ; \; x = 1,2,3 \; , \; y = 1,2$$

1) هل f كثافة فعلية لـ (X,Y)

2) عين الكثافة الهامشية لـ X, Y

3) هل X و Y مستقلان عشوائياً

الحل

1) يجب أن يتحقق

$$\sum_i \sum_j f(x_i , y_j) = 1$$

$$\sum_i \sum_j f(x_i , y_j) = \frac{(1)(1)^2}{30} + \frac{(1)(2)^2}{30} + \frac{(2)(1)^2}{30} + \frac{(2)(2)^2}{30} + \frac{3(1)^2}{30} + \frac{(3)(2)^2}{30}$$

$$= \frac{1+4+2+8+3+12}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

إذن f دالة كثافة فعلية لـ (X,Y)

2) $f_X(x) = \sum_j (x_i , y_j) = \frac{x}{30} + \frac{4x}{30} = \frac{5x}{30} = \frac{x}{6}$; $x = 1,2,3$

$f_Y(y) = \sum_i f(x_i , y_j) = \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{6y^2}{30} = \frac{y^2}{5}$; $y = 1,2$

3) يجب أن يتحقق الشرط

$$f(x,y) = f_X(x) . f_Y(y)$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30}$$

$$f_X(x) . f_Y(y) = \frac{x}{6} . \frac{y^2}{5} = \frac{xy^2}{30} = f(x,y)$$

إذن X و Y مستقلان عشوائياً

X \ Y	1	2	المجموع
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$
2	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$
3	$\frac{3}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{15}{30}$
المجموع	$\frac{6}{30}$	$\frac{24}{30}$	1

دالة التوزيع الهامشية لـ X

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ f_X(x_1) = \frac{5}{30} & 1 \le x < 2 \\ f_X(x_1) + f_X(x_2) = \frac{5}{30} + \frac{10}{30} = \frac{15}{30} & ; 2 \le x < 3 \\ f_X(x_1) + f_X(x_2) + f_X(x_3) = \frac{5+10+15}{30} = 1 & ; 3 \le x < +\infty \end{cases}$$

الأشعة العشوائية المستمرة

تعريف

نقول إن الشعاع (X,Y) مستمر إذا وجدت دالة غير سالبة $f(x,y)$ بحيث يكون من أجل أي عددين حقيقيين x, y

$$F(x,y) = p[X \le x , Y \le y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

SUBJECT: ____________ / /

نسمي هذه الدالة $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة للشعاع (X,Y) وهي تحقق الشرطين التاليين

1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$ ة التوزيع المشتركة (X,Y) المستمر

نجد أنّ
$$f(x,y) = \frac{d^2 F(x,y)}{dx\,dy}$$

هي دالة الكثافة المشتركة، وهي عبارة عن المشتق الثاني لدالة التوزيع مرة بالنسبة لـ X ومرة بالنسبة لـ Y

الكثافات الهامشية لـ X, Y

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

مثال:

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين دالة كثافتهما المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} c(3x+y) & ; \ 1<x<5 \\ & ; \ 0<y<3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

عين c لتكون f دالة كثافة فعلية

أوجد الكثافات الهامشية لـ X, Y

احسب الاحتمالات $P[Y<2]$ ، $P[2<X<4 , Y>1]$

الحل:

1) بما أنّ f كثافة فعلية لـ (X,Y) فهي تحقق الشرط

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_1^5\int_0^3 c(3x+y)\,dy\,dx = c\int_1^5 \left[3xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx$$

$$= c\int_1^5 \left[9x + \frac{9}{2}\right]dx = c\left[\frac{9x^2}{2} + \frac{9}{2}x\right]_1^5$$

$$= c\left[\left(\frac{225}{2} + \frac{45}{2}\right) - \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right)\right]$$

$$= c\left[\frac{252}{2}\right] = c \cdot 126 = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{126}$$

إذن تصبح دالة الكثافة المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{126}(3x+y) & ; \ 1<x<5 \\ & \ \ \ 0<y<3 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{126}(3x+y)\,dy$$

$$= \frac{1}{126}\left[3xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{126}\left[9x + \frac{9}{2}\right]$$

إذن
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{9}{126}\left(x + \frac{1}{2}\right) & ; \ 1<x<5 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_1^5 \frac{1}{126}(3x+y)\,dx$$

$$= \frac{1}{126}\left[\frac{3x^2}{2} + yx\right]_1^5 = \frac{1}{126}\left[\left(\frac{75}{2} + 5y\right) - \left(\frac{3}{2} + y\right)\right]$$

SUBJECT: ______ / /

$$= \frac{1}{126}\left[36+4y\right]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4y+36}{126} & ; \quad 0<y<3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

3) $P[2<X<4 \;,\; Y>1]$

$$= P[2<X<4 \;,\; 1<Y<3]$$

$$= \int_2^4\int_1^3 \left(\frac{3x+y}{126}\right) dy\,dx$$

$$= \frac{1}{126}\int_2^4 \left[3xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^3 dx = \frac{1}{126}\int_2^4 \left[\left(9x+\frac{9}{2}\right)-\left(3x+\frac{1}{2}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{126}\int_2^4 (6x+4)\,dx = \frac{1}{126}\left[3x^2+4x\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{126}\left[(48+16)-(12+8)\right] = \frac{44}{126} = \frac{22}{63}$$

• $P[Y<2] = \int_0^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^2 \left[\frac{4y+36}{126}\right]dy$

$$= \frac{1}{126}\left[2y^2+36y\right]_0^2 = \frac{80}{126} = \frac{40}{63}$$

المحاضرة الثالثة عشرة

الكثافة الشرطية:

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة

$$f(x,y) = p[X=x \,,\, Y=y]$$

ولتكن $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ الكثافات الهامشية لـ X، Y على الترتيب، فإننا نعرف الكثافة الشرطية لـ X علماً أن Y قد وقع (أو مشروطاً بـ Y) بـ:

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{P[X=x \,,\, Y=y]}{P[Y=y]} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

وكذلك نعرف الكثافة الشرطية لـ Y علماً X قد وقع (أو مشروطاً بـ X) بالعلاقة

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{P[X=x \,,\, Y=y]}{P[X=x]} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

مثال

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}+xy & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

1) عين $f_{Y/X}(y/x)$

2) احسب $p\left[Y>\frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}+dx\right]$

الحل

1) لحساب الكثافة الشرطية $f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

يجب أن نعين $f_X(x)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left[\frac{3}{4}+xy\right]dy$$

$$= \left[\frac{3}{4}y + x\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}+\frac{x}{2} \;, \quad 0<x<1$$

ومنه دالة الكثافة الشرطية

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3}{4}+xy}{\frac{3}{4}+\frac{x}{2}} \times \left(\frac{4}{4}\right)$$

$$= \frac{3+4xy}{3+2x}$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \frac{3+4xy}{3+2x} & ; \quad 0<y<1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) $p\left[Y>\frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}+dx\right] =$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3+4(\frac{1}{2})y}{3+2(\frac{1}{2})}\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\frac{3}{4}+\frac{y}{2}\right]dy$$

SUBJECT: ________________ / /

$= \left[\frac{3}{4}y + \frac{y^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{16}\right) = \dots$

تعميم على الأشعة العشوائية في $\mathbb{R}^n$ الإطلاع.

إذا كان X شعاعاً عشوائياً في $\mathbb{R}^n$ فإننا نعرف دالة توزيعه بـ

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P[X_1\le x_1, X_2\le x_2, \dots, X_n \le x_n]$$

ودالة كثافته الاحتمالية بـ

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

ودوال التوزيع لـ X_i : $i = 1,2,\dots,n$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(+\infty,\dots,+\infty,x_i,+\infty,\dots,+\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x_i}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

ونقول عن المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ إنها مستقلة عشوائياً إذا تحقق

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\dots f_{X_n}(x_n)$$

أو إذا كان

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = F_{X_1}(x)\dots F_{X_n}(x_n)$$

تمرين:

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة

$f(x,y) = e^{-x-y}$; $0<x<+\infty$

$0<y<+\infty$

ولتكن $A = \{(x,y): 0<x<+\infty , 0<y<\frac{x}{3}\}$

أوجد $P[(X,Y)\in A]$

الحل: $P[(X,Y)\in A] = \iint_{(x,y)\in A} f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{x}{3}} (e^{-x-y})\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\int_0^{\frac{x}{3}} e^{-y}\,dy\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{\frac{x}{3}}dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}\left[-e^{-\frac{x}{3}}+1\right]dx = \int_0^{+\infty}\left[e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x}\right]dx$$

$$= \left[-e^{-x} + \frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}x}\right]_0^{\infty} = -\left(-1+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

تمرين:

ليكن X متغيراً عشوائياً جدول توزيعه

X	0	1	المجموع
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

ولتكن Y متغيراً عشوائياً مستقلاً عن X وجدول توزيعه

Y	0	1	2	المجموع
$f_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

والمطلوب:

1) عين دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (X,Y)

2) عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Z = X + Y$

الحل:

1) بما أن X ، Y مستقلان عشوائياً فإن

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

ومنه جدول التوزيع المشترك لـ (X,Y)

$X \backslash Y$	0	1	2	المجموع
0	$(\frac{1}{3})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$	$(\frac{1}{3})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$	$(\frac{1}{3})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$
1	$(\frac{2}{3})(\frac{1}{4}) = \frac{2}{12}$	$(\frac{2}{3})(\frac{1}{2}) = \frac{2}{6}$	$(\frac{2}{3})(\frac{1}{4}) = \frac{2}{12}$	$\frac{8}{12}$
المجموع	$\frac{3}{12}$	6	3	1

2) لتعيين كثافة $Z=X+Y$ نلاحظ أن

$R_Z=\{0,1,2,3\}$

والاحتمالات الموافقة لهذه القيم

$f_Z(0)=P[Z=0]=P[X=0,Y=0]=f_{X,Y}(0,0)=\frac{1}{12}$

$f_Z(1)=P[Z=1]=P[X=0,Y=1]+P[X=1,Y=0]$
$=\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=\frac{4}{12}$

$f_Z(2)=P[Z=2]=P[X=0,Y=2]+P[X=1,Y=1]$
$=\frac{1}{12}+\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$

$f_Z(3)=P[Z=3]=P[X=1,Y=2]=\frac{2}{12}$

وبالتالي جدول الكثافة لـ Z هو

Z	0	1	2	3	المجموع
$f_Z(z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	1

تمرين:

ليكن X، Y متغيرين عشوائيين لهما الكثافة

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x+y}{210} & ; \; 2<x<6 \\ & \;\;\; 0<y<5 \\ 0 & ; \; \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

والمطلوب:

1) برهن أن f دالة كثافة فعلية لـ (X,Y)
2) عين الكثافات الهامشية لـ X، Y
3) عين دوال التوزيع الهامشية لـ X، Y
4) احسب $P[3<X<4, Y>2]$، $P[X>3]$
5) احسب $P[X+Y>4]$
6) عين دالة التوزيع المشتركة لـ (X,Y)
7) هل المتغيرين X، Y مستقلين عشوائياً.

الحل:

1) يجب أن يتحقق الشرط $\int\int f(x,y)\,dx\,dy=1$

$$\int_2^6\int_0^5 (2x+y)\,dy\,dx=\frac{1}{210}\int_2^6\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^5 dx$$

$$=\frac{1}{210}\int_2^6\left(10x+\frac{25}{2}\right)dx=\frac{1}{210}\left[5x^2+\frac{25}{2}x\right]_2^6$$

$$=\frac{1}{210}\left[(180+75)-(20+25)\right]=\frac{1}{210}[210]=1$$

2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{210}\int_0^5(2x+y)\,dy$$

$$=\frac{1}{210}\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^5=\frac{1}{210}\left[10x+\frac{25}{2}\right]=\frac{4x+5}{84} \;;\; 2<x<6$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\frac{1}{210}\int_2^6(2x+y)\,dx$$

$$=\frac{1}{210}\left[x^2+yx\right]_2^6=\frac{1}{210}\left[(36+6y)-(4+2y)\right]$$

$$=\frac{4y+32}{210}=\frac{2y+16}{105} \;;\; 0<y<5$$

3) دوال التوزيع الهامشية

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du=\frac{1}{84}\int_2^x(4u+5)\,du$$

$$=\frac{1}{84}\left[2u^2+5u\right]_2^x=\frac{1}{84}\left[(2x^2+5x)-(8+10)\right]$$

$$=\frac{1}{84}\left[2x^2+5x-18\right]$$

إذن

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & -\infty\le x<2 \\ \frac{2x^2+5x-18}{84} & 2\le x<6 \\ 1 & 6\le x<+\infty\end{cases}$$

SUBJECT:

$$= 1 - \frac{1}{210}\int_2^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 9x + 8\right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{210}\left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 8x\right]_2^4$$

$$= 1 - \frac{1}{210}(32 - 20) = 1 - \frac{12}{210} = \frac{33}{35}$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \qquad (6$$

$$= \int_2^x \int_0^y \left(\frac{2u+v}{210}\right) du\,dv$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x^2-4)y + \left(\frac{x}{2}-1\right)y^2}{210}, & 2 \le x < 6;\ 0 \le y < 5 \\ 0\ ; & x < 2;\ y < 0 \\ 1\ ; & x \geq 6;\ y \geq 5 \end{cases}$$

ملاحظة (7

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \left(\frac{4x+5}{84}\right)\left(\frac{2y+16}{105}\right)$$

$$\neq \frac{2x+y}{210} = f(x,y)$$

بالتالي X ، Y غير مستقلين

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv = \frac{1}{105}\int_0^y (2v+16)\,dv$$

$$= \frac{1}{105}\left[v^2 + 16v\right]_0^y = \frac{y^2+16y}{105}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & -\infty \le y < 0 \\ \dfrac{y^2+16y}{105} & 0 \le y < 5 \\ 1 & 5 \le y \le +\infty \end{cases}$$

$$p[3 < X < 4,\ Y > 2] = \qquad (4$$

$$= \frac{1}{210}\int_3^4\int_2^5 (2x+y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{210}\int_3^4 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_2^5 dx$$

$$= \frac{1}{210}\int_3^4 \left(6x + \frac{21}{2}\right) dx = \frac{1}{210}\left[3x^2 + \frac{21}{2}x\right]_3^4$$

$$= \frac{1}{210}\left(63 - \frac{63}{2}\right) = \frac{63}{420} = \frac{3}{20}$$

$$p[X > 3] = \int_3^6 f_X(x)\,dy$$

$$= \frac{1}{84}\int_3^6 (4x+5)\,dx$$

$$= \frac{1}{84}\left[2x^2 + 5x\right]_3^6 = \frac{69}{84} = \frac{23}{28}$$

$$p[X+Y > 4] = 1 - p[X+Y \le 4] \qquad (5$$

$$= 1 - \frac{1}{210}\int_2^4\int_0^{4-x} (2x+y)\,dy\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{210}\int_2^4 \left(2(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2}\right) dx$$

المحاضرة الرابعة عشر

دراسة دوال في المتغيرات العشوائية

١- الإشتقاق بمتغير عشوائي منفصل.

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً لمجموعة قيمه $R_X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ وله الكثافة الاحتمالية $f_X(x)=p[X=x]$ ، $x\in\mathbb{R}$ ولتكن Y متغيراً مرتبط بـ X بالعلاقة $Y=U(X)$ عندئذٍ يمكن حساب مجموعة قيم Y وكذلك كثافته بالحساب المباشر وأيضاً من خلال العلاقة

$$f_Y(y_n)=p[Y=y_n]=p[X=U^{-1}(y_n)]$$

أمثلة..

1) ليكن X جدول التوزيع

X	1	2
$f_X(x)$	0,2	0,8

عين دالة الاحتمال للمتغير $Y=X^2+1$

الحل

نلاحظ أن $R_Y=\{2,5\}$

$p[Y=2]=p[X=1]=0,2$

$p[Y=5]=p[X=2]=0,8$

ومنه جدول التوزيع لـ Y

Y	2	5	المجموع
$f_Y(y)$	0,2	0,8	1

2) ليكن X له جدول التوزيع

X	-3	-2	-1	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

عين جدول الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y=|X|$

الحل.

$p[Y=1]=p[X=\mp 1]=p[X=1]+p[X=-1]=\frac{2}{6}$

$p[Y=2]=p[X=\mp 2]=p[X=2]+p[X=-2]=\frac{2}{6}$

$p[Y=3]=p[X=\mp 3]=p[X=3]+p[X=-3]=\frac{2}{6}$

ومنه جدول الكثافة لـ Y

Y	1	2	3	المجموع
$f_Y(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

3) ليكن X متغيراً له جدول الكثافة

X	0	1	2	3	4	المجموع
$f_X(x)$	0,15	0,20	0,20	0,15	0,30	1

عين جدول الكثافة للمتغير $Y=(X-2)^2$

الحل..

$R_Y=\{0,1,4\}$

$p[Y=0]=p[X=2]=0,20$

$p[Y=1]=p[X=1]+p[X=3]$

$=0,20+0,15=0,35$

$p[Y=4]=p[X=0]+p[X=4]$

$=0,15+0,30=0,45$

ومنه جدول الكثافة لـ Y

Y	0	1	4	المجموع
$f_Y(y)$	0,20	0,35	0,45	1

4) ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu^x\cdot e^{-\mu}}{x!} & ; \quad x=0,1,2,\dots \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ $Y=4X$

الحل..

$R_Y=\{0,4,8,\dots\}$

ومنه دالة الكثافة لـ Y

$f_Y(y)=p[Y=y]=p[4X=y]=p[X=\frac{y}{4}]$

ومنه

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\mu^{\frac{y}{4}} \cdot e^{-\mu}}{(\frac{y}{4})!} & ; \quad y = 0, 4, 8, \dots \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

٢- الإنتقال لمتغير عشوائي مستمر :

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً له الكثافة $f_X(x)$ وليكن $Y = U(X)$ متغيراً معطى بدلالة X عندئذٍ يكون Y متغيراً مستمراً

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'|$$

$$\frac{dx}{dy} = x'_y$$

حيث $x'_y = (U^{-1}(y))'$ مشتق X بالنسبة لـ y

مثال:

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين دالة الكثافة للمتغير $Y = -2\ln X$

الحل:

$$Y = U(X) = -2\ln X \Rightarrow \ln X = \frac{-Y}{2}$$

$$\Rightarrow X = e^{-\frac{Y}{2}} = U^{-1}(Y)$$

$R_X = \{x : \ 0 < x < 1\}$

$R_Y = \{y : \ 0 < y < +\infty\}$

ومنه

$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) |(U^{-1}(y))'|$ دستور

$$(U^{-1}(y))' = (e^{-\frac{y}{2}})' = -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \, |(U^{-1}(y))'|$$

$$= f_X(e^{-\frac{y}{2}}) \cdot \left|-\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}\right| = 1 \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$$

إذن

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & ; \quad 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال:

ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

١) عين دالة كثافة $Y = X^3$

٢) عين دالة كثافة $Y = 2X + 1$

الحل:

$R_X = \{x : \ 0 < x < 1\} \Rightarrow$

$R_Y = \{y : \ 0 < y < 1\}$

$$Y = U(X) = X^3 \Rightarrow U^{-1}(Y) = Y^{\frac{1}{3}}$$

$$(U^{-1}(y))' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_Y(y) = f_X(U^{-1}(y)) \cdot |(U^{-1}(y))'| = f_X(y^{\frac{1}{3}}) \cdot \left|\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right|$$

$$= \overset{2}{\cancel{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}} (1 - y^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{\cancel{3}} y^{-\frac{2}{3}}$$

ومنه

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(y^{-\frac{1}{3}} - 1) & ; \quad 0 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(2

$R_X = \{x : \ 0 < x < 1\} \Rightarrow R_Y = \{y : 1 < y < 3\}$

$$Y = U(X) = 2X + 1 \Rightarrow X = U^{-1}(Y) = \frac{Y-1}{2}$$

ومنه $(U^{-1}(y))' = \left(\frac{y-1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$

$$f_Y(y) = f_X(u^{-1}(y)) . |(u^{-1}(y))'|$$

$$= f_X\left(\frac{y-1}{2}\right) . \left|\frac{1}{2}\right|$$

$$= \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{y-1}{2}\right)\left(1-\frac{y-1}{2}\right) . \frac{1}{2}$$

ومنه

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{3}{4}y^2 + 3y - \frac{9}{4} & ; \quad 1 < y < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad ; -\infty < x < +\infty \quad \sigma > 0$$

عين دالة الكثافة لـ $Y = X^3$

الحل.

$$R_X = \{x : -\infty < x < +\infty\} \Rightarrow R_Y = \{y : -\infty < y < +\infty\}$$

$$Y = u(X) = X^3 \Rightarrow u^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

$$(u^{-1}(y))' = (y^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_X(y) = f_X(u^{-1}(y)) |(u^{-1}(y))'|$$

$$= f_X(y^{\frac{1}{3}}) . \left|\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right|$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sigma\sqrt{2\pi}\, y^{\frac{2}{3}}} e^{\frac{-y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}} & -\infty < y < +\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

عين كثافة $Y = X^2$

الحل.

$$R_X = \{x : -\infty < x < +\infty\} \Rightarrow$$

$$R_Y = \{y : 0 \leq y < +\infty\}$$

$$Y = u(X) = X^2 \Rightarrow X = u^{-1}(Y) = \mp y^{\frac{1}{2}}$$

$$(u^{-1}(y))' = (\mp y^{\frac{1}{2}})' = \mp\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_Y(y) = f_X(u^{-1}(y)) . |(u^{-1}(y))'|$$

$$= f_X(\mp y^{\frac{1}{2}}) \left|\mp \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\right|$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-|y^{\frac{1}{2}}|} + \frac{1}{2} e^{-|-y^{\frac{1}{2}}|}\right] . \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{-y^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} e^{-y^{\frac{1}{2}}}\right] . \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

إذن:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y^{\frac{1}{2}}}}{2y^{\frac{1}{2}}} & ; \quad 0 < y < +\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & ; \quad 0 \leq y < +\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال..

ليكن X متغيراً كثافته

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ; \quad x\in[-1,1]\\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين كثافة $Y=X^2$

الحل..

$R_X=\{x: -1\le x\le 1\}\Rightarrow R_Y=\{y: 0\le y\le 1\}$

$y=x^2=u(x)\Rightarrow x=u^{-1}(y)=\mp y^{\frac{1}{2}}$

$(u^{-1}(y))'=(\mp y^{\frac{1}{2}})'=\mp\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

$f_Y(y)=f_X(u^{-1}(y))\,|(u^{-1}(y))'|$

$=f_X(\mp y^{\frac{1}{2}})\cdot\left|\mp\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right|$

$=\dfrac{f_X(y^{\frac{1}{2}})+f_X(-y^{\frac{1}{2}})}{2y^{\frac{1}{2}}}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} & 0<y\le 1\\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

المحاضرة الخامسة عشر

الانتقال بشعاع عشوائي متقطع (منفصل)

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً منفصلاً له الكثافة المشتركة $f_{(X,Y)}(x,y)$ حيث

$x\in R_X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$

$y\in R_Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n,\dots\}$

$f_{(X,Y)}(x,y)=p(X=x,Y=y)$

ولنفرض أنه هناك متغيرين عشوائيين منفصلين معرفين بدلالة X,Y من خلال العلاقة

$U=\psi_1(X,Y),\quad V=\psi_2(X,Y)$

بحيث أنه يمكن حساب X,Y بدلالة U,V بالشكل $X=W_1(U,V),\ Y=W_2(U,V)$ عندئذٍ كثافة الشعاع (U,V) المشتركة تعطى بالعلاقة

$f_{(U,V)}(u,v)=f_{(X,Y)}(W_1(u,v),W_2(u,v))$

ومجموعة القيم هي

$(u_i,v_j)=\{\psi_1(x_i,y_j),\psi_2(x_i,y_j)\}$

$R_U=\{u_1,u_2,\dots,u_n,\dots\}$

$R_V=\{v_1,v_2,\dots,v_n,\dots\}$

ويكون

$p(U=u_i,V=v_j)=p(X=W_1(u_i,v_j),Y=W_2(u_i,v_j))$

مثال..

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً منفصلاً له الكثافة المشتركة

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{n!}{x!\cdot y!\cdot(n-x-y)!}\,p_1^{x}\,p_2^{y}(1-p_1-p_2)^{n-x-y}$$

$x=0,1,2,\dots,n,\quad y=0,1,2,\dots,n,\quad 0\le x+y\le n$

ولنعرف المتغيرين $U=X+Y,\ V=\dfrac{X}{X+Y}$

والمطلوب:

عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل..

$U=X+Y\Rightarrow Y=U-X\Rightarrow Y=U(1-V)$

$V=\dfrac{X}{X+Y}\Rightarrow V=\dfrac{X}{X+U-X}=\dfrac{X}{U}\Rightarrow X=UV$

$X=W_1(U,V)=U.V$

$Y=W_2(U,V)=U(1-V)$

SUBJECT: ______ / /

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(w_1,w_2) = f_{(X,Y)}(u.v,\ u(1-v))$$

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{n!}{(u.v)!\,(u(1-v))!\,.(n-u)!}\,.\,p_1^{uv}\,p_2^{u(1-v)}\,.\,(1-p_1-p_2)^{n-u}$$

من أجل:

$u.v = 0,1,2,\dots,n,\quad u(1-v) = 0,1,2,\dots n$

$;\ 0 \le x+y = u \le n$

الإنتقال بعشوائي عشوائي مستمر

ليكن (X,Y) شعاع عشوائي مستمر دالة الكثافة المشتركة $f_{(X,Y)}(x,y)$ ولنعرف المتغيرين $U=\varnothing_1(X,Y)$, $V=\varnothing_2(X,Y)$ حيث

$X = \psi_1(U,V)$

$Y = \psi_2(U,V)$

عندئذٍ فإن كثافة (U,V) تعطى بالعلاقة

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\psi_1(u,v),\ \psi_2(u,v)).|J|$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

مثال:

ليكن (X,Y) شعاع عشوائي له الكثافة المشتركة:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} \ ; & 0<x<3,\ 0<y<4 \\ 0 \ ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولنأخذ المتغيرين $V = X+Y$, $U = \frac{4X}{3Y}$

والمطلوب: عين كثافة الشعاع (U,V)

الحل:

$$V = X+Y \Rightarrow X = V-Y$$

$$U = \frac{4X}{3Y} \Rightarrow U = \frac{4(V-Y)}{3Y} = \frac{4V}{3Y} - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow U + \frac{4}{3} = \frac{4V}{3Y} \Rightarrow \frac{3}{4}U + 1 = \frac{V}{Y}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{V}{\frac{3}{4}u+1} = \frac{4V}{3u+4} = \psi_2(u,v)$$

$$\Rightarrow X = V - \frac{4V}{3u+4} \Rightarrow X = V\left(1 - \frac{4}{3u+4}\right)$$

$$\Rightarrow X = \frac{3uV}{3u+4} = \psi_1(u,v)$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{12V}{(3u+4)^2} & \frac{3u}{3u+4} \\ \frac{-12V}{(3u+4)^2} & \frac{4}{3u+4} \end{vmatrix}$$

$$J(u,v) = \frac{48V}{(3u+4)^3} + \frac{36uV}{(3u+4)^3}$$

$$J(u,v) = \frac{12V(4+3u)}{(3u+4)^3} = \frac{12V}{(3u+4)^2}$$

$$0<y<4 \Rightarrow 0 < \frac{4V}{3u+4} < 4 \Rightarrow$$

$$0 < V < 3u+4$$

SUBJECT:

/ /

$$0<x<3 \Rightarrow 0<\frac{3uv}{3u+4}<3 \Rightarrow$$

$$0<uv<3u+4$$

$$\frac{1}{3u+4}<\frac{1}{v}<+\infty \Rightarrow$$

$$0<uv<3u+4 \Rightarrow$$

$$0<u<+\infty$$

$$f_{(u,v)}(u,v)=f_{(x,y)}(\psi_1(u,v),\psi_2(u,v)).|J|$$

$$f_{(u,v)}(u,v)=f_{(x,y)}\left(\frac{3uv}{3u+4},\frac{4v}{3u+4}\right)\cdot\left|\frac{12v}{(3u+4}\right.$$

$$\Rightarrow f_{(u,v)}(u,v)=\frac{1}{12}\,\frac{12v}{(3u+4)^2}=\frac{v}{(3u+4)}$$

$$0<v<3u+4 \;,\; 0<u<+\infty$$

إذن

$$f_{(u,v)}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{v}{(3u+4)^2} & ; \; 0<u<\infty \,,\, 0<v<3u+4\\[2mm] 0 & ; \; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

المحاضرة السادسة عشرة

الفصل السادس.

الصفات العددية للمتغيرات العشوائية والأشعة العشوائية

- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منفصل ولدالة في متغير عشوائي منفصل

تعريف.

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ عندئذٍ نعرف توقع X بـ $E(X)=\sum_x x f_X(x)$ من أجل كل قيم X الممكنة وذلك بشرط أن يتحقق

$$\sum_x |x| f_X(x) < +\infty$$

. إن $E(X)$ يمثل متوسط القيم التي يأخذها X وهذه في المدى الطويل أي متوسط مجتمع القياسات المأخوذة X إذا كررنا التجربة عدد كبير من المرات، ومن ناحية $E(X)$ تمثل الموقع على المحور ox، والتي يتركز حولها التوزيع الاحتمالي لـ X، لذلك تسمى متوسط التوزيع الاحتمالي

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عين توقع X.

الحل.

$$E(X)=\sum_x x f_X(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i f_X(x_i)$$

$$=(0)\left(\tfrac{1}{8}\right)+(1)\left(\tfrac{3}{8}\right)+(2)\left(\tfrac{3}{8}\right)+(3)\left(\tfrac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{0+3+6+3}{8}=\frac{12}{8}=1.5$$

تعريف..

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً دالة كثافته $f_X(x)$

ولتكن $g(X)$ دالة عددية في X عندئذٍ

$$E(g(X))=\sum_x g(x) f_X(x)$$

بشرط أن يتحقق

$$\sum_x |g(x)| f_X(x) < +\infty$$

مثال - احسب $E(X^2)$ في المثال السابق

الحل. $E(X^2)=\sum_x x^2 f_X(x)=\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2 f_X(x_i)$

$$=(0)^2\left(\tfrac{1}{8}\right)+(1)^2\left(\tfrac{3}{8}\right)+(2)^2\left(\tfrac{3}{8}\right)+(3)^2\left(\tfrac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{0+3+12+9}{8}=\frac{24}{8}=3$$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(x+1)} & ; \quad x=1,2,3,\dots\\[2mm] 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

هل لـ X توقع منته؟

الحل.

$$E(X)=\sum_x x f_X(x)=\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x+1}=\infty$$

لأنها متسلسلة غير متقاربة وبالتالي ليس لـ X توقع منته

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر ولدالة فيه

تعريف.

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً كثافته $f_X(x)$

عندئذٍ نعرف التوقع الرياضي لـ X بـ

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

بشرط أن يتحقق

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x| f_X(x)\,dx<+\infty$$

ومن أجل $g(x)$ دالة في X فإن

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

بشرط أن يتحقق

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)| f_X(x)\,dx<+\infty$$

مثال.

ليكن X متغيراً مستمراً كثافته

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & ; \quad x\in[2,5]\\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين توقع X ، EX^2 ، $E(X+1)$

الحل.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_{2}^{5} x\left(\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5=\frac{1}{3}\left(\frac{25-4}{2}\right)=\frac{7}{2}=3.5$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_{2}^{5} x^2\left(\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5=\frac{1}{3}\left[\frac{125-8}{3}\right]=\frac{117}{9}=13$$

$$E(X+1)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+1) f_X(x)\,dx=\int_{2}^{5}(x+1)\left(\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^5=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{25}{2}+5\right)-(2+2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}\right)=\frac{9}{2}=4.5$$

خواص التوقع.

1) $E(c)=c \,,\ \forall c\in\mathbb{R}$ ثابت

2) $E(c.X)=c.E(X)$

3) $E\left(\sum_{i=1}^{k} g_i(X)\right)=\sum_{i=1}^{k}E(g_i(X))$

4) $E\left(\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)\quad \forall c_i\in\mathbb{R}$ ثوابت حقيقية

البرهان.

[1] $E(c)=\int_{-\infty}^{+\infty} c.f_X(x)\,dx=c\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,dx}_{1}=c.1=c$

[2] $E(c.X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(c.x) f_X(x)\,dx=c\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx}_{E(X)}$

$$=c.E(X)$$

[3] $E\left(\sum_{i=1}^{k} g_i(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{k} g_i(x)\right]f_X(x)\,dx$

$$=\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(x) f_X(x)\,dx}_{E(g_i(X))}=\sum_{i=1}^{k}E(g_i(X))$$

SUBJECT: ______ / /

$$|E(X)| \leq E|X|$$

وذلك لأنه

$$|E(X)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\right| \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x)\,dx}_{E|X|}$$

$$|E(X)| \leq E|X|$$

في حالة المنفصل:

$$|E(x)| = \left|\sum_{i\geq 1} x_i \underbrace{f_X(x_i)}_{\geq 0}\right| \leq \sum_{i\geq 1} |x_i| \cdot f_X(x_i)$$

$$\leq E|X|.$$

(1 إذا كان $a \leq X \leq b$ فإن
$$a \leq E(X) \leq b$$

البرهان:

$$a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq x_i \leq b$$

$$\xrightarrow{f_X(x_i)\geq 0} a f_X(x_i) \leq x_i f_X(x_i) \leq b f_X(x_i)$$

$$\xrightarrow{\sum_i} \sum_i a f_X(x_i) \leq \sum_i x_i f_X(x_i) \leq \sum_i b f_X(x_i)$$

$$\Rightarrow a \underbrace{\sum f_X(x_i)}_{(1)} \leq \underbrace{\sum_i x_i f_X(x_i)}_{E(X)} \leq b \underbrace{\sum_i f_X(x_i)}_{(1)}$$

$$\Rightarrow a \leq E(x) \leq b$$

إذا كان $X \geq 0$ فإن $E(X) \geq 0$

إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين وكان $E(X) < +\infty$ ، $E(Y) < +\infty$ فإنه إذا كان

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

$$X \leq Y \Rightarrow Y - X \geq 0 \xrightarrow{7} E(Y-X) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(Y) - E(X) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(Y) \geq E(X)$$

إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها توقع فمنه عندئذ $\prod_{i=1}^{n}(X_i)$

توقع منتجه معطى بالشكل
$$E\left(\prod_{i=1}^{n}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

البرهان:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n}(X_i)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

وبما أن المتغيرات X_i مستقلة عن بعضها فإن

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

ومنه بالتعويض نجد

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_X(x_1)\,dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_X(x_2)\,dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} x_n f_X(x_n)\,dx_n$$

$$= E(X_1).E(X_2)\ldots E(X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

(10 إن عكس الخاصة (9) ليس صحيح بشكل عام
أي يمكن أن يكون $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ دون
أن يكون X, Y مستقلين عشوائياً

(11 $E(X^2) \neq E(X).E(X)$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & ; \quad x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع $E(X(X-5))$

الحل:

حسب خواص التوقع فإن

$$E(X(X-5)) = E(X^2 - 5X) = (EX^2) - 5E(X)$$

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = (1)\left(\frac{1}{10}\right) + (2)\left(\frac{2}{10}\right) + (3)\left(\frac{3}{10}\right) + (4)\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

SUBJECT: / /

$$E(X^2) = (1)^2\left(\frac{1}{10}\right) + (2)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (3)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (4)^2\left(\frac{4}{10}\right)$$

$$= \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

$$E(X(X-5)) = (10) - 5(3) = -5$$

المحاضرة السابعة عشر

العزوم:

تعريف:

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته $f_X(x)$ وليكن $r \geq 1$ عدداً صحيحاً، إذا وجد X^r توقع فإننا ندعوه بالعزم من المرتبة r ويعطى بالشكل

$$E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f_X(x) & (X \text{ منقطع}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)\,dx & (X \text{ مستمر}) \end{cases}$$

ونلاحظ أنه من أجل $r=1$ نحصل على التوقع $M = E(X)$ ومن أجل $r=2$ نحصل على العزم من المرتبة الثانية وهكذا

نتيجة:

بما أن $|X|^{r-1} \leq |X|^r$ فإنه إذا وجد العزم من المرتبة r فإن العزوم من المرتبة الأصغر من r تكون موجودة

تعريف:

نعرف العزم المركزي من المرتبة $r \geq 1$ حول $M = EX$

$$E(X-M)^r = \begin{cases} \sum_x (x-M)^r f_X(x) & (X \text{ منقطع}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^r f_X(x)\,dx & (X \text{ مستمر}) \end{cases}$$

مثال:

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين توقع $E(X^r)$ واستنتج $E(2X+1)^2$

الحل:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^r(2(1-x))\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (x^r - x^{r+1})\,dx$$

$$E(X^r) = 2\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^{r+2}}{r+2}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right)$$

$$\Rightarrow E(X^r) = \frac{2}{(r+1)(r+2)}$$

$$E(2X+1)^2 = E(4X^2+4X+1) = 4EX^2 + 4EX + 1$$

$$E(2X+1)^2 = 4\left(\frac{2}{3\cdot 4}\right) + 4\left(\frac{2}{2\cdot 3}\right) + 1 = 3$$

2- التباين والانحراف المعياري، خواصها

تعريف:

ليكن X متغيراً عشوائياً له عزم من المرتبة الثانية $(E(X^2) < \infty)$ فإننا نعرف تباين X بـ $Var(X) = E(X-EX)^2$

ومن أجل $M = EX$ فإن $Var(X) = E(X-M)^2$

وهو العزم المركزي من المرتبة حول M ويمثل متوسط مربعات انحرافات القياسات عن متوسطها

تعريف:

نعرف الانحراف المعياري لـ X بـ $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

أي أن $Var(X) = \sigma_X^2$

SUBJECT: ______ / /

صيغة أبسط لحساب التباين:

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = EX^2 - \mu^2.$$

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$E(X-\mu)^2 = EX^2 - 2\mu \underbrace{EX}_{\mu} + \mu^2$$

$$E(X-\mu)^2 = EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = EX^2 - \mu^2$$

. خواص التباين

1. $Var(C) = 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}$

الإثبات.

$$Var(C) = EC^2 - (EC)^2 = C^2 - C^2 = 0$$

2. $Var(C.X) = C^2 . Var(X)$

الإثبات.

$$Var(C.X) = E(C.X)^2 - (E(C.X))^2$$

$$\Rightarrow Var(C.X) = C^2EX^2 - C^2(EX)^2$$

$$Var(C.X) = C^2(EX^2 - (EX)^2) \Rightarrow Var(C.X) = C^2.Var(X)$$

نتيجة: $\sigma_{C.X} = |C|\sigma_X$

3. $Var(aX+b) = a^2 Var(X) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

الإثبات.

$$Var(aX+b) = E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2$$

$$= E(a^2x^2 + 2abX + b^2) - (a^2(EX)^2 + 2ab\,EX + b^2)$$

$$= a^2EX^2 + 2abEX + b^2 - a^2(EX)^2 - 2ab(EX) - b^2$$

$$= a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2 Var(X).$$

4. $Var(X) \leq E(X-a)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

الإثبات.

$$(X-a)^2 = ((X-EX) + (EX-a))^2$$

$$= (X-EX)^2 + (EX-a)^2 + 2(X-EX)(EX-a)$$

$$\Rightarrow E(X-a)^2 = Var(X) + \underbrace{(EX-a)^2}_{\geq 0} + 2(EX-a)\underbrace{E(X-EX)}_{0}$$

$$\Rightarrow E(X-a)^2 \geq Var(X)$$

تعريف المتغير العشوائي المعياري.

نقول عن متغير عشوائي إنه معياري إذا كان توقعه صفر وتباينه الواحد.

مبرهنة.

ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه $\mu = EX$ وتباينه $\sigma_X^2 = Var(X)$ موجودان عندئذٍ فإن المتغير $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ هو متغير عشوائي معياري أي أن $\sigma_Z = 1 , \mu_Z = 0$

البرهان

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} E(X - \mu_X)$$

$$= \frac{1}{\sigma_X}\left(\underbrace{EX}_{\mu_X} - \mu_X\right) = 0$$

$$E(Z^2) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma_X}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} E(X-\mu_X)^2 =$$

$$\frac{1}{\sigma_X^2} \underbrace{Var(X)}_{\sigma_X^2} = 1$$

3- التغاير وخواصه.

تعريف:

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين لكل منهما توقع منته ولـ (X,Y) توقع منته حيث

$$E(X.Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y (x.y) f_{X,Y}(x,y) & \text{متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x.y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & \text{مستمر} \end{cases}$$

عندئذٍ نعرف تغاير (X,Y) بالعلاقة

$$Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY)) = \sigma_{XY}$$

SUBJECT: ______ / /

• صيغة أخرى لحساب التغاير

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

البرهان:

$$Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$
$$Cov(X,Y) = E(X.Y - Y.EX - X.EY + EX.EY)$$
$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - EY.EX - \cancel{EX.EY} + \cancel{EX.EY}$$
$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - EY.EX$$

نتيجة:

إذا كان X,Y مستقلين فإنَّ

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$
$$cov(X,Y) = E(X.Y) - EY.EX = 0$$

مبرهنة (هامة)

$$Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y) \mp 2Cov(X,Y)$$

البرهان:

$$Var(X \mp Y) = E(X \mp Y)^2 - (E(X \mp Y))^2$$
$$= E(X^2 + Y^2 \mp 2XY) - ((EX)^2 + (EY)^2 \mp (EX)(EY))$$
$$= (EX^2 - (EX)^2) + (EY^2 - (EY)^2) + 2(EXY - (EX)(EY))$$
$$= var(X) + var(Y) \mp 2cov(X,Y)$$

نتيجة:

إذا كان X,Y مستقلين فإنَّ

$$Var(X \mp Y) = var(X) + var(Y)$$

نتيجة:

$$Cov(X,X) = Var(X)$$

لأنَّ

$$cov(X,X) = E(X.X) - EX.EX$$
$$Cov(X,X) = EX^2 - (EX)^2 = var(X)$$

نتيجة:

$$cov(aX+b, cY+d) = ac\,Cov(X,Y)$$

لأنَّ

$$Cov(aX+b, cY+d) =$$
$$E((aX+b)(cY+d)) - E(aX+b)E(cY+d)$$
$$= E(acXY + bcY + adX + bd) - ((aEX+b)(cEY+d))$$
$$= acE(X.Y) + bcE(Y) + adE(X) + bd - acEXEY$$
$$- bcE(Y) - adE(X) - bd$$
$$Cov(aX+b, cY+d) = ac(E(X.Y) - EXEY)$$
$$Cov(aX+b, cY+d) = ac\,Cov(X,Y)$$

$\sigma_x = \sqrt{var(X)}$

/ /

SUBJECT:

المحاضرة الثامنة عشر

معامل الإرتباط.

تعريف.

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين لهما عزوم من المرتبة الثانية منتهية، نعرف معامل الإرتباط بين X و Y بالعلاقة

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

نتيجة.

إذا كان X, Y مستقلين فإن $Cov(X,Y) = 0$ وبالتالي

$\rho(X,Y) = 0$

خواص معامل الإرتباط.

1) $\rho(X,X) = 1$ لأن

$$\rho(X,X) = \frac{Cov(X,X)}{\sigma_X \cdot \sigma_X} = \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} = 1$$

2) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ هامة

البرهان.

سنستخدم متراجحة شوارتز

$$(E\, X.Y)^2 \leq E X^2 . E Y^2$$

باستبدال X بـ $(X-EX)$ و Y بـ $(Y-EY)$

وبالتالي

$$\left(E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]\right)^2 \leq \underbrace{E(X-EX)^2}_{Var(X)} . \underbrace{E(Y-EY)^2}_{Var(Y)}$$

$$\Rightarrow (Cov(X,Y))^2 \leq Var(X).\ Var(Y)$$

أي أن

$$\frac{(Cov(X,Y))^2}{Var(X) \cdot Var(Y)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}}\right]^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow (\rho(X,Y))^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$$

3. هامة

$$\rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \rho(X,Y); & a.c > 0 \\ -\rho(X,Y); & a.c < 0 \end{cases}$$

البرهان.

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{Cov(aX+b, cY+d)}{\sqrt{Var(aX+b)}\sqrt{Var(cY+d)}}$$

$$= \frac{ac\, Cov(X,Y)}{|a|\sqrt{Var(X)} . |c|\sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \frac{a.c}{|a|.|c|} \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \frac{a.c}{|a|.|c|}\rho(X,Y) = \begin{cases} \rho(X,Y); & a.c > 0 \\ -\rho(X,Y); & a.c < 0 \end{cases}$$

نتيجة (دون برهان).

الشرط اللازم والكافي ليكون X, Y مرتبطين خطياً هو أن يكون $\rho^2(X,Y) = 1$

مثال.

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته المشتركة تعطى بالجدول

$Y \backslash X$	-1	0	1	$f_Y(y)$
-2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	
0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	

استنتج دوال الكثافة الهامشية لكل من X, Y ثم عين $\rho(X,Y)$، هل X, Y مستقلين عشوائياً

الحل..

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$$

X	-1	0	1	المجموع
$f_X(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$

Y	-2	0	2	المجموع
$f_Y(y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

لحساب معامل الارتباط ρ نحتاج لحساب المقادير
$\sigma_Y, Var(Y), EY^2, \sigma_X, Var(X), EX^2, E(X)$
$Cov(X,Y), E(X,Y)$

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = (-1)(\tfrac{4}{10}) + (0)(\tfrac{3}{10}) + (1)(\tfrac{3}{10})$$
$$= \frac{-4+0+3}{10} = \frac{-1}{10}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = (-1)^2(\tfrac{4}{10}) + (0)^2(\tfrac{3}{10}) + (1)^2(\tfrac{3}{10})$$
$$= \frac{4+0+3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{10} - (\tfrac{-1}{10})^2 = \frac{70-1}{100}$$
$$= \frac{69}{100} \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{69}{100}}$$

$$EY = \sum_y y f_Y(y) = (-2)(\tfrac{4}{10}) + (0)(\tfrac{2}{10}) + (2)(\tfrac{4}{10})$$
$$= \frac{-8+0+8}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

$$EY^2 = \sum_y y^2 f_Y(y) = (-2)^2(\tfrac{4}{10}) + (0)^2(\tfrac{2}{10}) + (2)^2(\tfrac{4}{10})$$
$$= \frac{16+0+16}{10} = \frac{32}{10}$$

$$Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{32}{10} - (0)^2 = \frac{32}{10}$$

$$\Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\frac{32}{10}}$$

$$E(X.Y) = \sum_x \sum_y x.y\, f_{X,Y}(x,y)$$
$$= (-1)(-2)(\tfrac{2}{10}) + (-1)(0)(\tfrac{1}{10}) + (-1)(2)(\tfrac{1}{10})$$
$$+ (0)(-2)(\tfrac{1}{10}) + (0)(0)(0) + (0)(2)(\tfrac{2}{10})$$
$$+ (1)(-2)(\tfrac{1}{10}) + (1)(0)(\tfrac{1}{10}) + (1)(2)(\tfrac{1}{10})$$
$$= \frac{4}{10} - \frac{2}{10} - \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{2}{10}$$

وبالتالي
$$Cov(X,Y) = EX.Y - EX.EY$$
$$= \frac{2}{10} - (\tfrac{-1}{10})(0) = \frac{2}{10}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{\frac{2}{10}}{\sqrt{\frac{69}{100}}\sqrt{\frac{32}{10}}} = 0{,}135$$

اذن $\rho(X,Y) \neq 0$ وبالتالي X,Y غير مستقلين

مثال (2)

ليكن X,Y متغيرين عشوائيين لهما دالة الكثافة المشتركة

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 6xy(2x-y); & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $\rho(X,Y)$

الحل..

نعين أولاً الكثافات الهامشية

$$f_X(x) = \int_0^1 6xy(2x-y)\,dy$$
$$= 6x\int_0^1 (2y - xy - y^2)\,dy$$
$$= 6x\left[y^2 - x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 6x(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{3})$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \left(\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{49}{144} = \frac{43}{720}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y(y(4-3y))\,dy$$

$$= \int_0^1 (4y^2 - 3y^3)\,dy = \frac{7}{12}.$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2(y(4-3y))\,dy$$

$$= \int_0^1 [4y^3 - 3y^4]\,dy = \frac{2}{5}$$

وبالتالي $$Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{43}{720}$$

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy(6xy(2-x-y))\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 6x^2y^2(2-x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 6x^2\left(\int_0^1 [2y^2 - xy^2 - y^3]\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 6x^2\left[\frac{2y^3}{3} - \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 6x^2\left[\frac{2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{4}\right]dx$$

$$= \int_0^1 6x^2\left(\frac{5}{12} - \frac{x}{3}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5x^2}{2} - 2x^3\right)dx = \left[\frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$= 4x - 3x^2 = x(4-3x)$$

إذن

$$f_X(x) = \begin{cases} x(4-3x) & ; \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 6xy(2-x-y)\,dx$$

$$= 6y\int_0^1 (2x - x^2 - xy)\,dx$$

$$= 6y\left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2}\right]_0^1$$

$$= 6y\left[1 - \frac{1}{3} - \frac{y}{2}\right] = 4y - 3y^2$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} y(4-3y) & ; \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x(x(4-3x))\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 3x^3)\,dx = \left[\frac{4x^3}{3} - 3\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2(x(4-3x))\,dx$$

$$= \int_0^1 (4x^3 - 3x^4)\,dx = \left[x^4 - \frac{3x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

SUBJECT: / /

المحاضرة التاسعة عشرة

الدوال المولدة للعزوم لمتغير عشوائي

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة كثافته $f_X(x)$ نعرف الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X بالعلاقة

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) & X \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

خواص هذه الدالة

1) $M_{aX+b}(t) = e^{tb} M_X(at)$

البرهان

$$M_{aX+b}(t) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = E\left[e^{atX} \cdot \underbrace{e^{tb}}_{\text{ثابت}}\right]$$

$$= e^{tb} E\left(e^{(at)X}\right) = e^{tb} M_X(at)$$

2) $\left.\dfrac{\partial^r M_X(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0} = EX^r$ (بدون برهان)

وبالتالي نستنتج أن

$$E(X) = M'_X(t)\Big|_{t=0}$$

$$E(X^2) = M''_X(t)\Big|_{t=0}$$

3) إذا كان X، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

البرهان

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right]$$

$$\overset{X,Y \text{ مستقلين}}{=} E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

4) إذا كانت X_1، ...، X_n متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس تابع التوزيع فإن

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) \overset{\text{مستقلة}}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \left[M_{X_i}(t)\right]^n$$

استقلال ونفس تابع التوزيع

$$Cov(X,Y) = EX.Y - EX.EY$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \frac{-1}{144}$$

وبالتالي

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{43}{720}}\sqrt{\frac{43}{720}}}$$

$$= \frac{-5}{43}$$

أي أن $\rho(X,Y) \neq 0$ وبالتالي X، Y غير مستقلين

الصفات العددية للأشعة العشوائية

1) التوقع في حالة الاستمرار

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy\right) dx$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\, dx\, dy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\, dx\, dy$$

2) التوقع في حالة التقطع

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x \sum_y f(x,y)$$

$$E(X) = \sum_x \sum_y x f(x,y)$$

$$E(Y) = \sum_x \sum_y y f(x,y)$$

SUBJECT: / /

5) هناك توزيع إحتمالي وحيد له الدالة المولدة للعزوم $M(t)$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} p & ; \quad x=1 \ : \ 0<p<1 \\ q & ; \quad x=0 \ : \ q=1-p \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$ واحسب العزوم حتى المرتبة الثالثة ثم استنتج تباين X

الحل.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$
$$= e^{t(1)}.p + e^{t(0)}.q$$

$$\boxed{M_X(t) = pe^t + q}$$

$$EX = M'_X(t) = [pe^t]_{t=0} = p$$

$$EX^2 = M''_X(t) = [pe^t]_{t=0} = p$$

$$EX^3 = M'''_X(t) = [pe^t]_{t=0} = p$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p) = p.q$$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_X(t)$

الحل.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{tx}(1)\,dx = \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^1$$

$$M_X(t) = \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t} = \frac{e^t - 1}{t}$$

الدالة المولدة لعزوم شعاع عشوائي (X,Y)

تعريف.

لتكن $f(x,y)$ دالة الكثافة المشتركة لـ (X,Y). وإذا كان $E(e^{t_1x+t_2y})$ موجوداً من أجل قيم $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$

فإننا نعرف الدالة المولدة لعزوم الشعاع العشوائي (X,Y) بـ

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{t_1x+t_2y})$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{t_1x+t_2y} f(x,y) & ; \quad (X,Y) \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y} f(x,y)\,dx\,dy & \quad (X,Y) \text{ مستمر} \end{cases}$$

خواص هذه الدالة

1) إن $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ تحدد تماماً توزيع (X,Y) وتوزيع X وتوزيع Y بسبب الوحدانية

2) $M_{X,Y}(t_1,0) = M_X(t_1) = E(e^{t_1X})$

3) $M_{X,Y}(0,t_2) = M_Y(t_2) = E(e^{t_2Y})$

4) $E(X^k Y^m) = \left.\dfrac{\partial^{k+m} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial^k t_1 \cdot \partial^m t_2}\right|_{t_1=0,\, t_2=0}$

$$E(X)=\left.\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,0)}{\partial t_1}\right|_{t_1=0}$$

$$E(Y)=\left.\frac{\partial M_{X,Y}(0,t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_2=0}$$

$$E(X.Y)=\left.\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}\right|_{t_1=0,\,t_2=0}$$

مثال.

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & ; \quad 0<x<y<+\infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ ، استنتج منها $M_X(t)$ ، $M_Y(t)$

الحل.

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=E\left(e^{t_1x+t_2y}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\int_x^{+\infty}\left(e^{t_1x+t_2y}\right)e^{-y}\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^{\infty} e^{t_1x}\left[\frac{1}{t_2-1}e^{(t_2-1)y}\right]_x^{\infty}dx$$

$$=\int_0^{\infty} e^{t_1x}\left(-\frac{1}{(t_2-1)}e^{(t_2-1)x}\right)dx \quad ; \ t_2-1<0$$

$$=\frac{1}{1-t_2}\int_0^{\infty} e^{(t_1+t_2-1)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{1-t_2}\left[\frac{1}{t_1+t_2-1}e^{(t_1+t_2-1)x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{1-t_2}\left(-\frac{1}{t_1+t_2-1}\right.$$

$; \ t_1+t_2-1<0$

إذن
$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=\frac{1}{(1-t_1-t_2)(1-t_2)}$$

بشرط $t_2-1<0$

$t_1+t_2-1<0$

أي $t_2<1$ ، $t_1+t_2<1$

$$M_X(t_1)=M_{(X,Y)}(t_1,0)=\frac{1}{1-t_1}, \quad t_1<1$$

$$M_Y(t_2)=M_{X,Y}(0,t_2)=\frac{1}{(1-t_2)^2}, \quad t_2<1$$

ملاحظة.

من خاصية الوحدانية للدالة المولدة للعزوم نقول بأن X ، Y مستقلين عشوائياً إذا، فقط إذا كان

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)=M_X(t_1).M_Y(t_2)$$

الدوال المميزة وخواصها.

تعريف.

إذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة $f_X(x)$ نعرف الدالة المميزة لـ X بـ

$$\phi_X(t)=E\left(e^{itX}\right)=\begin{cases} \sum_x e^{itx} f_X(x) & ; \quad X \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx & ; \quad X \text{ مستمر} \end{cases}$$

ملاحظة.

بما أن $|e^{itx}|=1$

$|\phi_X(t)|\le 1$ بما أن $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$

و $|\phi_X(0)|=1$

$$e^{itx}=\cos(tx)+i\sin(tx)$$

$$\rightarrow |e^{itx}|=\sqrt{\cos^2(tx)+\sin^2(tx)}=\sqrt{1}=1$$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

تعطى

$$f_X(x)=\begin{cases}\binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; & x=0,1,\dots,n \\ & 0<p<1 \\ & q=1-p \\ 0 ; & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين $M_X(t)$ ، $\phi_X(t)$

الحل.

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\sum_x e^{tx} f_X(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{n} e^{tx} C^n_x p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n} C^n_x (e^t p)^x q^{n-x}$$

وحسب مفكوك ذات الحدين يكون

$$M_X(t)=(e^t p+q)^n$$

مفكوك ذات الحدين

$$\left[(x+y)^n=\sum_{x=0}^{n} C^n_x x^x y^{n-x}\right]$$

$$\phi_X(t)=E(e^{itx})=\sum_x e^{itx} f_X(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{n} e^{itx} C^n_x p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n} C^n_x (e^{it} p)^x q^{n-x}$$

وحسب مفكوك ذات الحدين

$$\phi_X(t)=(pe^{it}+q)^n$$

مثال.

ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x} ; & x>0 \\ 0 ; & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين $\phi_X(t)$

الحل.

$$\phi_X(t)=E(e^{itx})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{itx}(3e^{-3x})\,dx$$

$$\phi_X(t)=3\int_{0}^{\infty} e^{(it-3)x}\,dx=3\left[\frac{e^{(it-3)x}}{it-3}\right]_0^{\infty}$$

$$=3\left(-\frac{1}{it-3}\right) ; \quad it-3<0$$

$$\Rightarrow \phi_X(t)=\frac{3}{3-it} ; \quad t<\frac{3}{i}$$

خواص الدالة المميزة

1) $\phi_{aX+b}(t)=e^{itb}\phi_X(at)$

2) ليكن $X_1, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة

$$\phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}(t)=(\phi_{X_1}(t))^n$$

إذا كانت هذه المتغيرات نفس التوزيع

3) $\phi_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=i^{(k)}\cdot EX^k$

$$\phi'_X(t)\Big|_{t=0}=i\cdot EX$$

$$\phi''_X(t)\Big|_{t=0}=(i)^2\cdot EX^2=-EX^2$$

$$\phi^{(4)}_X(t)\Big|_{t=0}=(i)^4 EX^4=EX^4$$

تعريف.

نعرف الدالة المميزة لمتجه عشوائي (X,Y) كثافته المشتركة

$f(x,y)$ بـ

SUBJECT: / /

$$\phi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = E\left[e^{i(t_1x+t_2y)}\right] = \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{i(t_1x+t_2y)} f(x,y) & \text{منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1x+t_2y)} f(x,y)\,dx\,dy & \text{مستمر} \end{cases}$$

انتهت المحاضرات

مع تمنياتي بالنجاح

هاني الجنابي