* المحاضرة الأولى :-   الثلاثاء ٢٠١٤/٢/٤م.

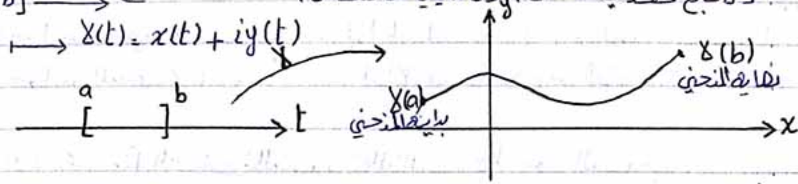
* الفصل الأول: التكاملات العقدية *

* تعريف المنحني العقدي في المستوي العقدي :-

هو كل تابع عقدي مستمر بمتحول حقيقي من الشكل:

$$\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \gamma(t)=x(t)+iy(t)$$



نسمي t الوسيط وبالتالي المنحني العقدي يعيّن بتابعين حقيقيين هي $x(t), y(t)$ كما نرمز للمنحني بـ γ أو C أو ....

- نقول أن المنحني γ يمر بالنقطة z_0 من المستوي العقدي إذا وُجِدَ $t_0\in[a,b]$ بحيث:

$$z_0=\gamma(t_0)=x(t_0)+iy(t_0)$$

- نسمي $\gamma(a)$ بداية المنحني γ، وَ $\gamma(b)$ نهاية المنحني γ.

وَ بالتالي يمكن توجيه أي منحني عقدي وفق تزايد قيم الوسيط t.

- نقول عن منحني γ أنه (مغلق) إذا انطبقت نهايته على بدايته أي إذا كان $\gamma(a)=\gamma(b)$.
- نقول عن المنحني γ أنه (بسيط) إذا كان γ متباين أي:

$$\forall t_1,t_2\in[a,b]:\ \gamma(t_1)=\gamma(t_2) \Rightarrow t_1=t_2$$

* ملاحظة: يكون المنحني المغلق بسيط إذا كان متباين على $]a,b[$.

- نقول عن المنحني γ أنه من الصنف C' إذا كان γ قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر.
- نقول عن المنحني γ أنه من الصنف C' قطعياً إذا وجدت تجزئة منتهية للمجال $[a,b]$ من الشكل: $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$

بحيث يكون γ من الصنف C' على المجالات الجزئية: $[t_i,t_{i+1}]\ ;\ i=0,1,\dots,n-1$ وَ

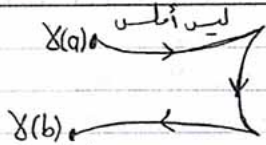
النهايات $\lim\limits_{t \xrightarrow{<} t_i}\gamma'(t)$, $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} t_i}\gamma'(t)$ موجودة ومحدودة. غير متباين ومنه

ليس بسيط

* مثال:

① منحني غير بسيط، غير مغلق، لكنه من الصنف C'.

لكل نقطة يوجد مماس



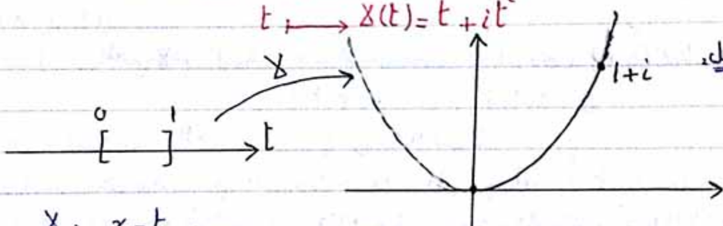
② ـ منحني بسيط من الصنف C' قطعياً.

ـ نقول عن منحني γ أنه (مريح) إذا كان 1ـ بسيط ـ2ـ ومن الصنف C' قطعياً.
ـ نقول عن المنحني γ أنه (أملس) إذا كان 1ـ بسيط ـ2ـ ومن الصنف C'.

*تمرين :ـ مثل المنحنيات العقدية التالية في المستوي العقدي :ـ

①
$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = t + i t^2$$

الحل:



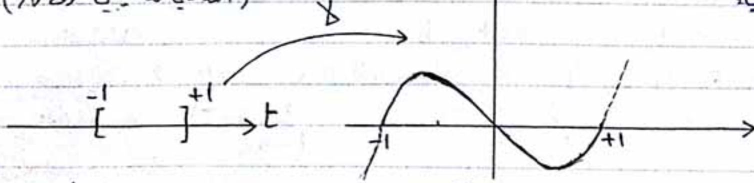
$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$. قطع مكافئ ; $x \in [0,1]$

إنّ γ هو منحني أملس بدايته 0 ونهايته $1+i$

②
$$\gamma : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = t + i(t^3 - t) \qquad \gamma(a) = -1 + i(-1+1) = -1$$

الحل:

(المنحني التكعيبي حرف N)



لمعرفة γ نكتب المعادلات الديكارتية :

$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^3 - t \end{cases} \Rightarrow \gamma : y = x^3 - x$

كل تابع كثير حدود يكون أملس لأنه يمكن اشتقاقه. لا منحني أملس

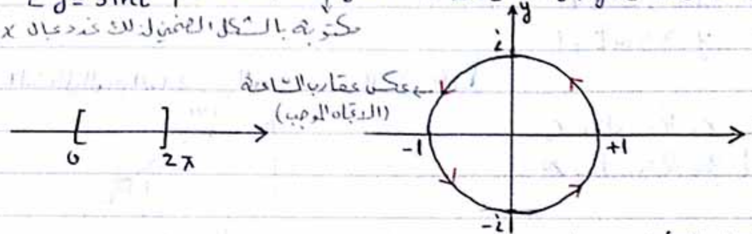
بدايته -1 ونهايته $+1$ $\quad \gamma(b) = \gamma(+1) = +1 + i0 = +1$

③
$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

الحل:

$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \gamma^* : x^2 + y^2 = 1 \;;\; x \in [-1, 1] \,,\, y \in [-1, 1]$ دائرة الواحدة:

مكتوبة بالشكل الضمني لأن عندنا x و y معاً.

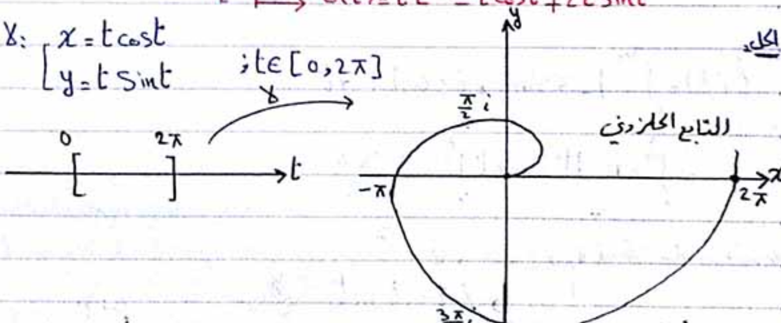


γ منحني أملس مغلق.

④
$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = t e^{it} = t \cos t + i t \sin t$$

الحل:

$\gamma : \begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases} \;;\; t \in [0, 2\pi]$



γ منحني أملس بدايته النقطة 0 ونهايته 2π.

* طول منحني عقدي :-

نفرض $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحني أملس عندئذٍ طول المنحني γ يُعطى بالقانون:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

حيث: $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

طويلة

* تمرين :- احسب طول المنحنيات التالية :-

① $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{C}$

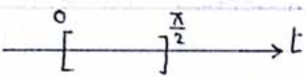
$t \longmapsto \gamma(t) = 3e^{it} + i + 1$

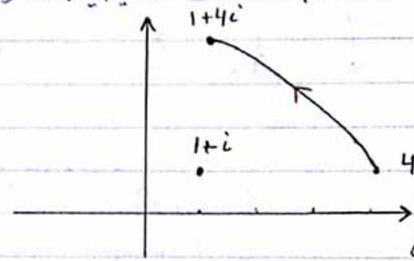
الحل $= (3\cos t + 1) + i(3\sin t + 1)$

$$\gamma : \begin{cases} x = 3\cos t + 1 \\ y = 3\sin t + 1 \end{cases}$$

الشكل العام للمعادلات الوسيطية للدائرة هي :-

$$\begin{cases} x = R\cos t + x_0 \\ y = R\sin t + y_0 \end{cases}$$





المحيط $= 2\pi . 3$

$= 6\pi$

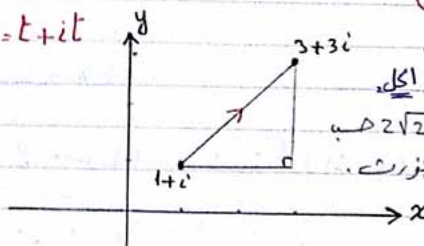
ربع الدائرة $= \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi/2} |-3\sin t + i3\cos t|\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\, dt = 3t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$$

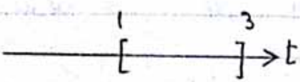
② $\gamma : [1,3] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = t + it$



الحل.

الطول $2\sqrt{2}$ حسب فيثاغورث.



* المحاضرة: الثانية: الأحد (الثلاثاء): ٩/٣/٢٠١٤م.

$$\ell(\gamma) = \int_1^3 |1+i|\,dt = \int_1^3 \sqrt{2}\,dt = [\sqrt{2}\,t]_1^3 = 2\sqrt{2} \quad \#$$

* تمارين وظيفية :-

مثل المنحنيات العقدية التالية في المستوي العقدي واحسب طولها:-

1. $\gamma_1 : \gamma_1(t) = \cos t + i \sin t \quad ; t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

2. $\gamma_2 : \gamma_2(t) = \cos^2 t + i \sin^2 t \quad ; t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

3. $\gamma_3 : \gamma_3(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t \quad ; t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

انتهت المحاضرة الأولى.

---

* المحاضرة الثانية: الأحد (الثلاثاء): ٩/٣/٢٠١٤م

* تكامل تابع عقدي * :-

نميز حالتين:

1. تكامل تابع عقدي بمتحول حقيقي:-

بفرض: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto f(t) = u(t) + i v(t)$ تابع عقدي بمتحول حقيقي. عندئذ:

f قابلة للمكاملة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $u(t), v(t)$ قابلين للمكاملة على $[a,b]$.

ويكون:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

* تمرين:- احسب التكامل:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} e^{it}\,dt$$

الحل:

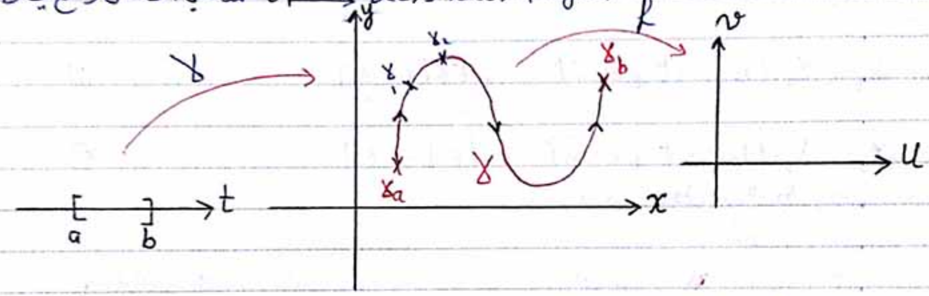
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos t\,dt + i\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin t\,dt = [\sin t]_{\pi/6}^{\pi/3} + i[-\cos t]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

2- تكامل تابع عقدي بقول عقدي :-

بفرض: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع عقدي مستمر
على منطقة D (منطقة = مفتوحة ومترابطة) وبفرض،

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$$
$t\longmapsto \gamma(t)=x(t)+iy(t)$ منحني أملس واقع في D.



نقوم بتجزئة المجال [a,b] كما يلي :-

$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$$

ولنضع: $\gamma_k=\gamma(t_k)$; $k=0,1,\dots,n$ فنحصل على تجزئة للمنحني γ.
نختار δ_k نقطة اختيارية من القوس $\widehat{\gamma_k\gamma_{k+1}}$ ولنشكل المجموع :-

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(\delta_k).(\gamma_{k+1}-\gamma_k)$$

نجعل n تسعى للانهاية، وطول كل مجال جزئي $[t_k,t_{k+1}]$ يسعى نحو الصفر فإذا كانت نهاية المتتالية I_n موجودة وتساوي I فإننا نسمي I تكامل التابع العقدي $f(z)$ على المنحني γ ونكتب :- $I=\int_\gamma f(z)dz$

نضع: $\delta_k=\alpha_k+i\beta_k$; $\gamma_k=x_k+iy_k$

وأيضاً نضع :-

$$u_k=u(\alpha_k,\beta_k)\ ;\ v_k=v(\alpha_k,\beta_k)$$

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k\ ;\ \Delta y_k=y_{k+1}-y_k$$

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(\delta_k)(\gamma_{k+1}-\gamma_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(u_k+iv_k)(\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta x_k-v\Delta y_k)+i\sum_{k=0}^{n-1}(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k)$$

نجعل: $\forall k: |\gamma_{k+1}-\gamma_k|\longrightarrow 0 , \quad n\longrightarrow\infty$

عندئذ: $I_n\longrightarrow I$. ومنه:

$$I=\int_\gamma f(z)dz$$

$$=\int_\gamma(u\,dx-v\,dy)+i\int_\gamma(v\,dx+u\,dy)$$

حيث أنّ:

$$dx=x'(t)dt \quad , \quad dy=y'(t)dt$$

ومنه يكون:

$$I=\int_a^b(ux'-vy')\,dt+i\int_a^b(vx'+uy')dt$$

$$=\int_a^b(u+iv)(x'+iy')\,dt$$

ومنه:

$$\Longrightarrow \boxed{I=\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.}$$

ملحوظة

وهو القانون المباشر لحساب التكاملات العقدية.

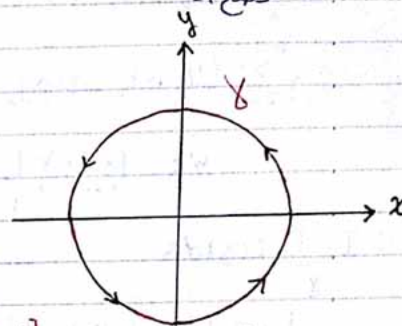
*تمرين:

احسب التكاملات العقدية التالية:

[1] * $I_1 = \int \frac{dz}{z}$; $\gamma(t) = e^{it}$; $t[0,\pi]$

الحل: نلاحظ أنّ γ منحني دائرة الواحدة موجهة بالاتجاه الموجب مرسومة لمرة واحدة.

نضع: $f(z) = \frac{1}{z}$ فنلاحظ أنّ $f(z)$ تابع عقدي مستمر على γ



$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt$$

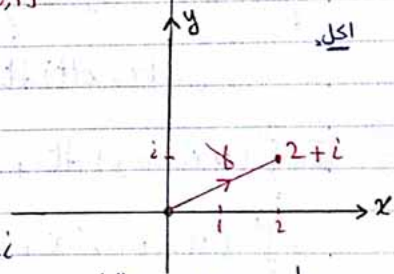
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}.\gamma'(t).dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\,dt$$

$$= [it]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

[2] * $I_2 = \int_\gamma z\,dz$; $\gamma(t) = 2t + it$; $t \in [0,1]$

الحل:



$$I = \int_\gamma z\,dz = \int_0^1 \gamma(t).\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t+it).(2+i)\,dt$$

$$= \int_0^1 (3t + 4it)\,dt = \frac{3}{2} + 2i$$

* طريقة ثانية للحل:

نفرض أنّ: $z = x+iy$ فيكون: $dz = dx + i\,dy$ نعوض فنجد:

$$I = \int z\,dz = \int (x+iy)(dx+i\,dy)$$

نجري التحويل: $x = x(t) = 2t$, $y = y(t) = t$ على γ فنجد أنّ:

$$I = \int_0^1 (2t+it)(2+i)\,dt = \frac{3}{2} + 2i$$ *

* وظيفة:

أعد حل التمرين I_2 من أجل: $\gamma(t) = 2t^2 + ti$ وماذا تستنتج.

انتهت المحاضرة الثانية.

* المحاضرة الثالثة : الأربعاء : ١٢/٢/٢٠١٤ م.

* خواص التكاملات العقدية :-

بفرض $f(z), g(z)$ توابع عقدية مستمرة على منطقة D، ونفرض :

$\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ منحني أملس واقع في D عندئذٍ :-

1. $$\int_\gamma (f+g)(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$$

2. $$\int_\gamma \alpha . f(z)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

3. $$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz \quad ;$$ ($-\gamma$ معكوس γ)

4. $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \quad ; \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

5. بفرض L طول المنحني γ ونفرض وجود $M>0$ تحقق الشرط التالي :-

$$\forall z \in \gamma : \quad |f(z)| < M$$

عندئذٍ

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M.L$$

* تمارين : احسب التكاملات العقدية التالية :-

1* $I_1 = \int_\gamma z^2\,dz \quad ; \quad \gamma(t) = t + 2t^2 i \quad ; \quad t \in [0,1]$

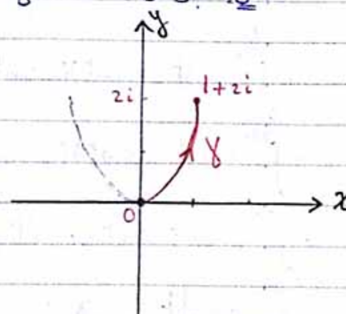
الحل، بفرض : $f(z) = z^2$ عندئذٍ :-

$$I_1 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t)).\gamma'(t).dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 4t^4 + 4t^3 i).(1 + 4t i)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^2 - 4t^4 + 4t^3 i + 4t^3 i - 16t^5 i + 16t^4 i^2\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 20t^4)\,dt + i\int_0^1 (8t^3 - 16t^5)\,dt$$

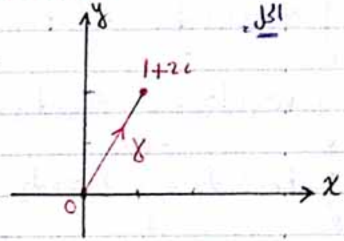


$$= \left[\frac{t^3}{3} - 4t^5\right]_0^1 + i\left[2t^4 - \frac{16t^6}{6}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 4\right) + i\left(2 - \frac{16}{6}\right) = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

$\boxed{2}$ * $I_2 = \int_\gamma z^2\,dz$; $\gamma(t) = t + 2ti$; $t \in [0,1]$

الحل:



$$I_2 = \int_\gamma z^2\,dz = \int_0^1 (-3t^2 + 4t^2 i)(1+2i)\,dt$$

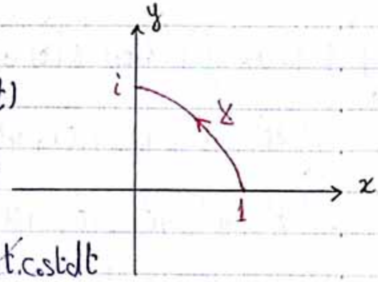
$$= \cancel{\int} (1+2i)\left(\left[-t^3\right]_0^1 + i\left[\frac{4}{3}t^3\right]_0^1\right)$$

$$= (1+2i)\left(-1 + \frac{4}{3}i\right) = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

* ملاحظة: نلاحظ في التكاملين I_1 و I_2 أن جواب التكامل للتابع $f(z)=z^2$ لم يتغير على الرغم من تغير التابع $\gamma(t)$، وذلك لأنه عندما يكون التابع تحليلي فإن تكامله لا يتعلق بالطريق المسلوك. وسنأخذ ذلك في مبرهنة فيما بعد.

$\boxed{3}$ * $I_3 = \int \bar{z}\,dz$; $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

الحل: نفرض أن: $z = x + iy$ ومنه: $dz = dx + i\,dy$ إذاً:



$$I_3 = \int_\gamma x - iy\,(dx + i\,dy)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos t - i\sin t)(-\sin t\,dt + i\cos t\,dt)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos t - i\sin t)(-\sin t + i\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\cos t.\cancel{\sin t} + i\sin^2 t + i\cos^2 t - i^2\sin t.\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2i\,dt = \frac{\pi}{2}i$$

4 * $I_4=\int_\gamma \bar{z}\,dz$; $\gamma(t)=(1-t)+it$; $t\in[0,1]$

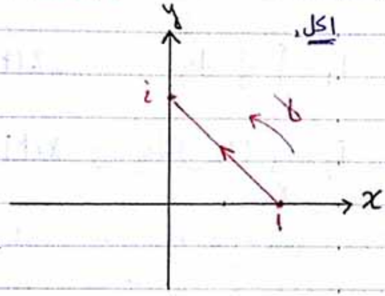
$I_4=\int_\gamma (x-iy)(dx+idy)$

$I_4=\int_\gamma (1-t-it)(-1+i)\,dt$

$=(1+i)\left[t-\frac{t^2}{2}-\frac{it^2}{2}\right]_0^1$

$=(-1+i)\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}+\frac{i}{2}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{2i}{2}=i$



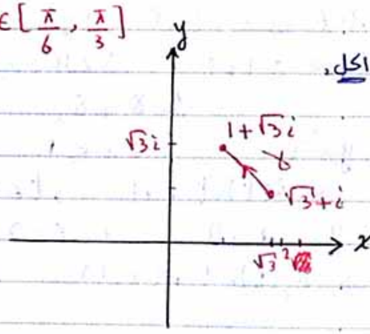
5 * $I_5=\int_\gamma z\,dz$; $\gamma(t)=2e^{it}$; $t\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

$I_5=\int_{\pi/6}^{\pi/3}(2e^{it})(2ie^{it})\,dt$

$=4i\int_{\pi/6}^{\pi/3} e^{2it}\,dt$

$=4i\left[\frac{1}{2i}e^{2it}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$=2\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=-2$

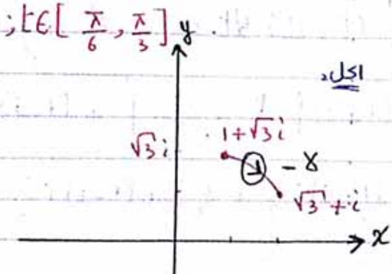


6 * $I_6=\int_\gamma z\,dz$; $\gamma(t)=2e^{i(\frac{\pi}{2}-t)}$; $t\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

$I_6=\int_{\pi/6}^{\pi/3} 2e^{i(\frac{\pi}{2}-t)}\left(-2ie^{i(\frac{\pi}{2}-t)}\right)dt$

$=-4i\int_{\pi/6}^{\pi/3} e^{i(\pi-2t)}\,dt$

$=2\left[e^{i(\pi-2t)}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}=2$ *



* وظيفة :-
احسب التكاملات العقدية التالية :-

* $I_1 = \int_{\gamma} z^2 \, dz \quad ; \gamma(t) = e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$

* $I_2 = \int_{\gamma} (1+\bar{z}) \, dz \quad ; \gamma(t) = t + it^2 \quad ; t \in [0,1]$

انتهت المحاضرة الثالثة .

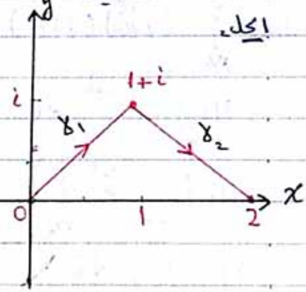
---

* المحاضرة الرابعة . الثلاثاء ١٢/١٨ ٢٠١٤ م

* تمرين :- احسب التكامل : $I = \int_{\gamma} z \, dz$ حيث لا المنحني المكون من القطعتين المستقيمتين الواصلتين بين النقط $0, 1+i, 2$ على الترتيب .

الحل :

نضع : $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$



$\gamma_1 : y = x \quad ; 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow \gamma(t) = t + it \quad ; t \in [0,1]$

$\gamma_2 : y = -x + 2 \quad ; 1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow \gamma_2(t) = t + (2-t)i \quad ; t \in [1,2]$

ومنه يكون :-

$$I = \int_{\gamma_1} z \, dz + \int_{\gamma_2} z \, dz$$

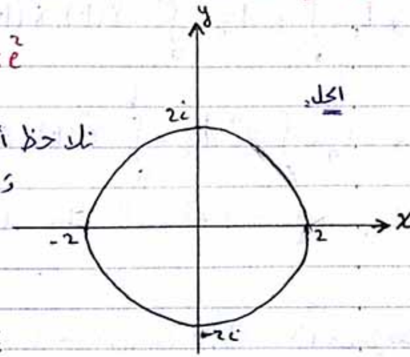
$$= \int_0^1 (t + it)(1+i) \, dt + \int_1^2 (t + 2i - it)(1-i) \, dt$$

$$= (1+i)\left[\frac{t^2}{2} + \frac{it^2}{2}\right]_0^1 + (1-i)\left[\frac{t^2}{2} + 2it - \frac{it^2}{2}\right]_1^2 \quad \begin{matrix} 2 \to 2 + 4i - 2i \\ 1 \to -\frac{1}{2} - 2i + \frac{i}{2} \end{matrix}$$

$$= (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + (1-i)\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2 \quad \#$$

* تمرين :- بفرض : $\gamma(t)=2e^{it}$; $t\in[0,2\pi]$ أثبت أن :-

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2-i}\,dz\right| \le \frac{4}{3}\pi e^{2}$$



الحل :

نلاحظ أن لامنحني دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 2

وبالتالي $L(\gamma)=4\pi$

كذلك :

$\forall z\in\gamma:\ |z|=2$

$\forall z\in\gamma:\ |z^2-i| \ge \big||z^2|-|i|\big|$

طويلة طويلة متراجحة مثلثية

$=|4-1|=3$

$\forall z\in\gamma:\ \dfrac{1}{|z^2-i|}\le\dfrac{1}{3}$

أيضاً :-

$\forall z\in\gamma:\ |e^{iz}|=|e^{i(x+iy)}|$

$=|e^{ix-y}|=e^{-y}\le e^{2}$ محدود

$|e^{iz}|=|e^{ix+i^2y}|$

$=|e^{ix}.e^{-y}|=|e^{ix}|.|e^{-y}|$

$=e^{-y}$; $|e^{ix}|=1$ فكما

ومنه :

$\forall z\in\gamma:\ \left|\dfrac{e^{iz}}{z^2-i}\right|\le\dfrac{e^{2}}{3}$

ومنه حسب خواص التكاملات العقدية :-

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2-i}\,dz\right| \le \frac{4}{3}\pi e^{2}.$$ #

* ملاحظة :-

بفرض $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ منحني أملس بدايته $\gamma(a)$ ونهايته $\gamma(b)$

عندئذ نلاحظ أن :-

$$I_0=\int_\gamma 1\,dz=\int_a^b\gamma'(t)\,dt=[\gamma(t)]_a^b=\gamma(b)-\gamma(a).$$

التابع التحليلي: < مستمر
قابل للاشتقاق على مجموعة تعريفه.

$$* I_1 = \int_\gamma z\, dz = \int_a^b \gamma(t).\gamma'(t)\, dt = \left[\frac{\gamma^2(t)}{2}\right]_a^b = \frac{\gamma^2(b) - \gamma^2(a)}{2}$$

$$* I_n = \int_\gamma z^n\, dz = \int_a^b \gamma^n(t).\gamma'(t)\, dt = \left[\frac{\gamma^{n+1}(t)}{n+1}\right]_a^b = \frac{\gamma^{n+1}(b) - \gamma^{n+1}(a)}{n+1}$$

ومنه: كل من التكاملات السابقة لا تتعلق بالطريق المسلوك وإنما بداية ونهاية المنحني.

* تعريف:

بفرض $F(z)$ ، $f(z)$ توابع عقدية مستمرة على المنطقة D عندئذٍ نقول أنّ $F(z)$ تابع أصلي لـ $f(z)$. إذا كان $F'(z) = F(z)$.

كما نسمّي $F(z) + C \;;\; C \in \mathbb{C}$ مجموعة التوابع الأصلية للتابع $f(z)$.

* مبرهنة:

بفرض $f(z)$ تابع عقدي معرّف ومستمر على منطقة وحيدة الترابط D ونفرض $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ منحني واقع في D وكان لـ $f(z)$ تابع أصلي بالنسبة لـ z وليكن $F(z)$ عندئذٍ:

وحيدة الترابط أي لا تقسم المنحني إلى منحنيين منفصلين.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

أي أنّ التكامل في هذه الحالة لا يتعلق بالطريق المسلوك.

* تمرين: احسب التكاملات العقدية التالية:

$$\text{I}_* \; I_1 = \int_0^{\pi+i} \cos z\, dz = [\sin z]_0^{\pi+i}$$

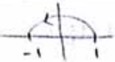
$$= \sin(\pi + i) - \sin(0) = \frac{e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}}{2i} - 0$$

$$= \frac{-\frac{1}{e} + e}{2i}$$

$\ln z = \ln|z| + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)$

; $k \in \mathbb{Z}$ عندما $k=0$ ⇐ قيمة رئيسية

$\boxed{2}$ * $I_2 = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{z} = [\ln z]_{+1}^{-1}$



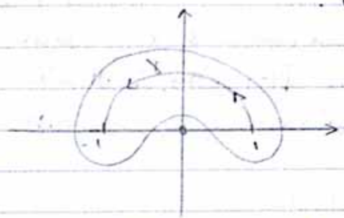
$= \ln(-1) - \ln(1) = i\pi - 0 = i\pi$

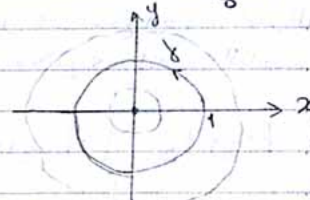
ما عندي (معلش سالب). له قانون.

* ملاحظة :-

وجدنا أنّ $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ حيث γ منحني دائرة الواحدة :
$\gamma(t) = e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$

حيث $f(z) = \frac{1}{z}$ معرّف ومستمر على $\mathbb{C}^*$.





نلاحظ أنه لا يمكن أن يكون المنحني لا في منطقة وحيدة الترابط وبالتالي شروط البرهنة السابقة غير محققة.

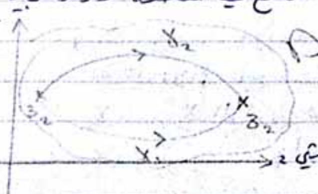
* مبرهنة كوشي : «دون برهان» :-

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على المنطقة D و γ منحني بسيط مغلق واقع في D

عندئذٍ : $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

* مبرهنة :

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على منطقة D وبفرض z_1, z_2 نقطتان من D عندئذٍ ، التكامل $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ مستقل عن الطريق الواقع في المنطقة D والواصل بين z_1, z_2.



- الإثبات :

بفرض γ_1, γ_2 طريقين مختلفين بين z_1 و z_2 .
نلاحظ أنّ $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ منحني مغلق بسيط واقع في D . ومنه حسب مبرهنة كوشي :

$$\int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} f(z)\,dz=0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz=0$$

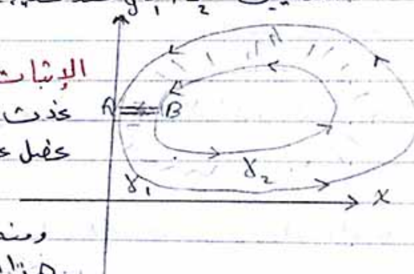
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz-\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

* مبرهنة :-

بفرض γ_1 , γ_2 منحنيين بسيطين مغلقين بحيث يقع أحدهما ضمن الآخر وموجهين بنفس الاتجاه، ولـيكن $f(z)$ تابع عقدي وتحليلي في المنطقة الواقعة بين المنحنيين γ_1 , γ_2 عندئذٍ :-

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$



الإثبات :

نحدث شقاً في المنطقة المفروضة وليكن AB وبالتالي نحصل على المنحني المغلق التالي :

$$[BA]+(-\gamma_1)+[AB]+\gamma_2$$

قطعة مستقيمة

ومنه حسب مبرهنة كوشي التكامل على هذا المنحني يساوي الصفر أي :-

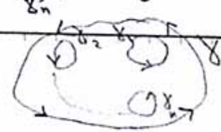
$$\cancel{\int_{[BA]} f(z)\,dz}+\int_{-\gamma_1} f(z)\,dz+\cancel{\int_{[AB]} f(z)\,dz}+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

* ملاحظة : يمكن تعميم المبرهنة السابقة كما يلي :-

بفرض $f(z)$ تابع عقدي تحليلي في المنطقة المحصورة بين المنحني γ والمنحنيات $\gamma_1 , \dots , \gamma_n$ الواقعة ضمن γ حيث $\gamma_1 , \dots , \gamma_n$ لا تتقاطع وهي مغلقة وبسيطة عندئذٍ :-

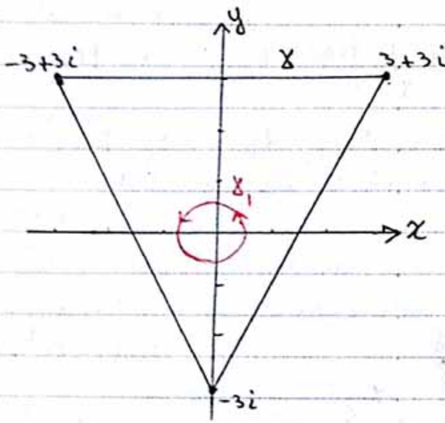
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\dots+\int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$



هام * تمرين: احسب التكامل $I=\int_\gamma \frac{dz}{z}$ حيث γ منحني مثلث رؤوسه النقاط $-3i$, $-3+3i$, $3+3i$ وموجه بالاتجاه الموجب.

$I=2\pi i$

شرح



* وظيفة: [1] احسب التكاملات الآتية:-

* $I_1=\int_\gamma z\,dz$; $\gamma=[1,1+i,2+2i]$. خط منكسر

* $I_2=\int_0^i z\cos z\,dz$ بالتجزئة

* $I_3=\int_\gamma z\cos z\,dz$; $\gamma(t)=e^{it}$; $t\in[0,2\pi]$ حسب كوشي D.4 كاملة

[2] بفرض: $\gamma(t)=t+it$; $t\in[0,1]$ أثبت أنّ:-

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{z}}{3}\,dz\right| \le e$$

* * *

انتهت المحاضرة الرابعة.

تمت

* صيغ كوشي التكاملية :-

* مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على المنطقة D وبفرض γ منحني بسيط مغلق واقع في D وبفرض $a \in D$ (حيث a عدد عقدي) واقعة ضمن γ) عندئذٍ :-

① $$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a)$$

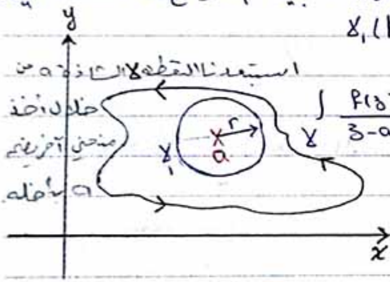
② $$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

حيث نسمي a في هذه الحالة نقطة شاذة من الرتبة n بالنسبة للتابع $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$.

- الإثبات :- ① نلاحظ أن التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلي على D باستثناء النقطة a.

نفرض γ_1 منحني دائرة مركزها a ونصف قطرها r بحيث γ_1 واقع تماماً ضمن γ أي:

$$\gamma_1(t) = re^{it}+a \quad ; \; t \in [0, 2\pi]$$



ومنه حسب مبرهنة :

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}+a)}{\cancel{re^{it}}} \cdot i\cancel{r e^{it}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i f(re^{it}+a)\,dt$$

نجعل $r \to 0$ فيكون :-

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} i f(a)\,dt = 2\pi i f(a)$$

② نضع :-

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ a :-

$$\Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz \quad , \quad f''(a) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$

$$\vdots$$

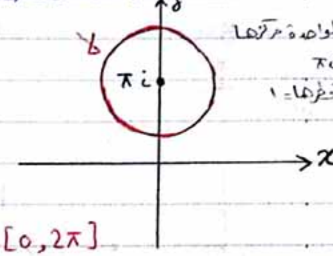
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad .\#$$

* استخدام صيغ كوشي التكاملية :-

* تمرين : احسب التكاملات العقدية التالية :-

* [1] $I_1 = \int_\gamma \frac{z^2 e^z}{z - \pi i}\, dz \quad ; \quad \gamma(t) = e^{it} + \pi i \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$

الحل . نضع $f(z) = z^2 e^z$ فنلاحظ أن $f(z)$ تحليلي على $\mathbb{C}$ و $a = \pi i$ نقطة شاذة للتابع $\frac{f(z)}{z - \pi i}$ ومنه حسب صيغ كوشي التكاملية يكون :



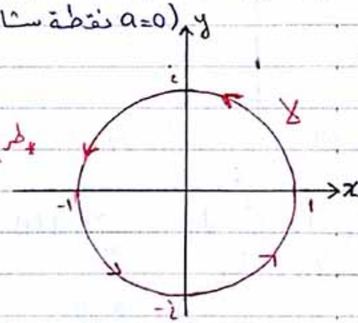
$$I_1 = \int_\gamma \frac{z^2 e^z}{z - \pi i}\, dz = 2\pi i\, f(a)$$
$$= 2\pi i\, f(\pi i)$$
$$= 2\pi i\left[(\pi i)^2 e^{\pi i}\right] = 2\pi^3 i$$

$e^{\pi i} = -1$

* [2] $I_2 = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{z}\, dz \quad ; \quad \gamma(t) = e^{it} \quad , t \in [0, 2\pi]$

الحل . نضع $f(z) = z^2 + 1$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ و ($a = 0$ نقطة شاذة داخل γ) حسب كوشي التكاملي :-

$$I_2 = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0)$$
$$= 2\pi i(1) = 2\pi i$$



* طريقة ثانية :-

$$I_2 = \underbrace{\int_\gamma z\, dz}_{0} + \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{z}}_{2\pi i}$$

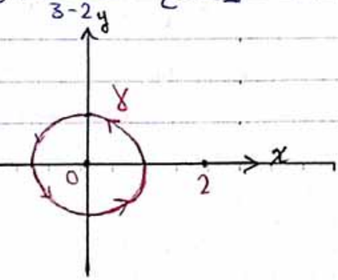
(تحليلي داخل γ حسب كوشي $= 0$) $\Rightarrow I_2 = 0 + 2\pi i = 2\pi i$

* [3] $I_3 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 - 2z}\, dz \quad ; \quad \gamma(t) = e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$

$z^2 - 2z = z(z-2)$

الحل . نضع $f(z) = \frac{\cos z}{z - 2}$ تحليلي داخل γ . ومنه :

$$I_3 = \int_\gamma \frac{\frac{\cos z}{z-2}}{z}\, dz = 2\pi i\, f(0)$$
$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$



دائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 3

* [4] $I_4 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-2z}\,dz \quad ; \gamma(t) = 3e^{it}+0 \; ; t\in[0,2\pi]$

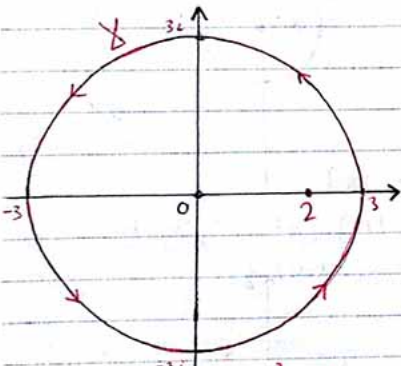
الحل: نلاحظ أن γ يحوي نقطتين شاذتين للتابع $\frac{\cos z}{z^2-2z}$ هما 0 و 2 لذلك نجزأ:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} = \frac{(A+B)z-2A}{z(z-2)}$$ توحيد مقامات

بالمطابقة نجد أن:

$$A+B=0 \quad و \quad -2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2} \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

ومنه يكون:



$$\frac{\cos z}{z^2-2z} = -\frac{1}{2}\frac{\cos z}{z} + \frac{1}{2}\frac{\cos z}{z-2}$$

وبالتالي:

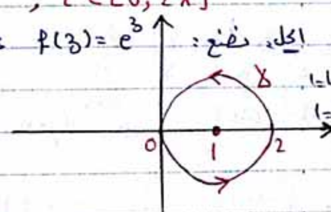
$$I_4 = -\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\cos z}{z-2}\,dz$$

$$= -\frac{1}{2}2\pi i\cos(0) + \frac{1}{2}2\pi i\cos(2)$$

$$= \pi i(\cos(2)-1)$$ → عدد عقدي واقع على المحور التخيلي الجزء السالب (السفلي).

* [5] $I_5 = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz \quad ; \quad \gamma(t) = e^{it}+1 \quad ; t\in[0,2\pi]$

الحل: نضع: $f(z)=e^z$ عندئذٍ:



$$I_5 = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(1)$$

من المرتبة الثانية (مشتق مرة)

$$= 2\pi i e.$$

* [6] $I_6 = \int_\gamma \frac{2z^4+1}{(z-1-i)^4}\,dz \; ; \gamma(t) = 2e^{it}+2+2i \quad ; t\in[0,2\pi]$..

← دائرة مركزها $2+2i$ ونصف قطرها 2

الحل:

نضع $f(z)=2z^4+1$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$. نلاحظ أن: $a=1+i$ نقطة شاذة من المرتبة الرابعة للتابع $\frac{f(z)}{(z-1-i)^4}$ وتقع داخل γ لأن:

γ منحني دائرة ذ (1+i) تبعد عن مركزها $\sqrt{2}$ أصغر من نصف القطر=2 نعم داخل γ بعينه.

$$I_\gamma = \int_\gamma \frac{2z^4+1}{(z-1-i)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(1+i)$$

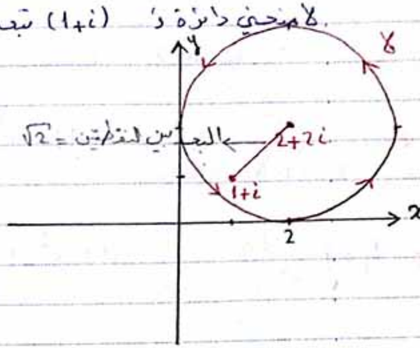
$f'''(z) = 48z$

$$= \frac{2\pi i}{3!}\,(48(1+i))$$

$$= \frac{2\pi i}{6}\,(48(1+i))$$

$(\times(1-i))$

$$= -16\pi + 16\pi i$$



* تمرين: أوجد القانون العام للتكامل:

$$I_n = \int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz \;;\; \gamma(t) = e^{it} \;;\; t \in [0, 2\pi] \;,\; n \in \mathbb{Z}$$

الحل: نميز حالتين: [1] $n \leq 0$ عندئذٍ:

التابع $z^{-n} e^z$ تحليلي داخل γ ويكون $I_n = 0$ حسب كوشي.

[2] $n > 0$ عندئذٍ حسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$I_n = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) \quad ; f(z) = e^z$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \quad \#$$

* سؤال: ماذا لو كانت النقطة الشاذة a واقعة على المنحني γ هل تعتبر داخله أم خارجه أم ماذا نفعل؟؟ للجواب على هذا السؤال نحل التمرين الآتي:

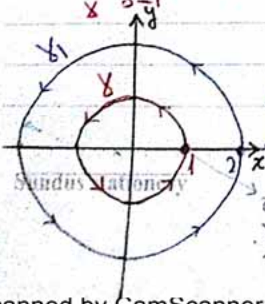
* تمرين: احسب التكامل I الآتي:

$$* I = \int_\gamma \frac{z}{z-1}\,dz \quad ; \gamma(t) = e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$$

الحل: نأخذ دائرة مركزها 0 ونصف قطرها 2 ولتكن γ_1 فيكون:

$$I = \oint = \int = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

إذاً: تعميم: ومنه إذا كانت النقطة الشاذة واقعة على المنحني γ نعتبرها داخل γ ومن ثم نطبق صيغ كوشي التكاملية.



النقطة شاذة تقع على γ.

* وظيفة:-

<u>أولاً</u>: باستخدام صيغ كوشي التكاملية احسب التكاملات التالية:-

* $I_1 = \int_{\gamma} \frac{e^{z}}{z^3 + z}\, dz \quad ; \quad \gamma(t) = 2e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$

ينتج ثلاث نقاط شاذة هي $i, -i, 0$ تقع داخل γ

(توزيع كسور).

* $I_2 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 - 1} \quad ; \quad \gamma(t) = e^{it} + 1 \quad ; t \in [0, 2\pi]$

ينتج لدينا النقاط $(i, -i, -1, 1)$ النقطة الشاذة وحيدة هي (1) والباقي خارج γ.

<u>ثالثاً</u>:

* $I_3 = \int_{\gamma} \frac{2z + 1}{(z-1)(z-2)^2}\, dz \quad ; \quad \gamma(t) = 2e^{it} + i \quad ; t \in [0, 2\pi]$

<u>ثانياً</u>: أوجد القانون العام للتكامل:

$I_n = \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z+i)^n}\, dz \quad ; \quad \gamma(t) = 2e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$

* * *

انتهت المحاضرة الخامسة.

* **تمرين: تعريف:**

بفرض $f(z)$ تابع عقدي معرف على D عندئذٍ نقول عن $f(z)$ إنه محدود على D إذا حقق الشرط التالي:

$$\exists M \geq 0 \quad ; \quad \forall z \in D \quad : \quad |f(z)| \leq M$$

* **مبرهنة:**

بفرض $f(z)$ تابع عقدي تحليلي على المنطقة D ونفرض γ منحني دائرة واقعة تماماً في D من الشكل:

$$\gamma(t) = re^{it} \;;\; t \in [0, 2\pi]$$

ونفرض $f(z)$ تابع محدود على D أي:

$$\exists M \geq 0 \;;\; \forall z \in D \;:\; |f(z)| \leq M$$

عندئذٍ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M\, n!}{r^n}$$

الإثبات: لدينا حسب صيغة كوشي التكاملية:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

طول المنحني $\gamma = 2\pi r$

$$|f^{(n)}(a)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \cdot \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M\, n!}{r^n}$$

بطويلة — حسب الخاصة (5) من خواص التكاملات العقدية

مع العلم أنَّ:

$$\forall z \in \gamma \;:\; \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}}$$

حيث:

$$\forall z \in \gamma \;;\; \left| \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$$

* **مبرهنة:**

بفرض $f(z)$ تابع عقدي تحليلي ومحدود على $\mathbb{C}$ عندئذٍ $f(z) = c$ حيث c ثابت عقدي.

- الإثبات: لنضع: $\gamma(t) = re^{it} + z \quad ; \quad t\in[0,2\pi]$

منحني دائرة مركزها z اختيارية من $\mathbb{C}$ وكذلك نصف قطرها r اختياري من $\mathbb{R}^{*+}$. عندئذ حسب مبرهنة:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad : |f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

بما أن: ← لـ $D=\mathbb{C}$ تحليلي على $\mathbb{C}$ كلها

f(z) تحليلي على $\mathbb{C}$ ونجعل $r \to \infty$ يكون:

$$\forall z\in\mathbb{C} : \; |f'(z)|=0 \Rightarrow f'(z)=0 \Rightarrow f(z)=C$$ ← ثابت عقدي

- إن عكس هذه المبرهنة صحيح ولن ندرسه الآن.

* المبرهنة الأساسية في الجبر:

بفرض: $f(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ كثير حدود

من الدرجة n في $\mathbb{C}[z]$ ← (حلقة كثيرات الحدود العقدية) حيث:

$n\in\mathbb{N}^*$; $a_n \neq 0$ عندئذ:

يوجد لـ f(z) ، n جذر في $\mathbb{C}$.

كما يمكن كتابة f(z) على الشكل:

$$f(z)=a_n(z-z_1)\text{——}(z-z_n)$$

الإثبات:

نفرض أنه لا يوجد جذور لـ f(z) في $\mathbb{C}$ وبالتالي التابع: $F(z)=\frac{1}{f(z)}$ تحليلي على $\mathbb{C}$.

كذلك: $|F(z)| = \frac{1}{|f(z)|}$ ← طويلة

$$|F(z)| = \frac{1}{|z^n|\left[a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right]} \longrightarrow 0$$ عندما $z \to \infty$

ومنه فإن F(z) محدود على $\mathbb{C}$.

وبالتالي: $F(z)=C$ (من المبرهنة السابقة)، أي:

$$f(z)=C$$

وهذا يناقض الفرض.

وبالتالي يوجد جذر لـ $f(z)$ وليكن z_1 عندئذٍ:

$$f(z)=(z-z_1).f_1(z)$$

حيث: $f_1(z)$ من الدرجة $n-1$.

وبتكرار هذه العملية نحصل على:

$$f(z)=a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)$$

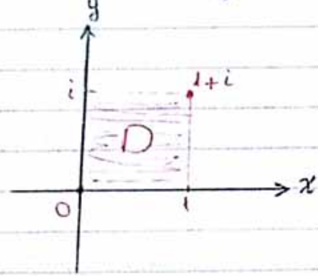
* تمرين:

بفرض $f(z)=\sin z$ تابع عقدي معرّف على المنطقة D:

$$D=\{z\in\mathbb{C} \;;\; 0<Re(z)<1 \;;\; 0<Im(z)<1\}$$

أثبت أن $f(z)$ محدود على D.

الحل: نلاحظ أن:



$$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| \le \frac{|e^{iz}|}{2}+\frac{|e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = ch(y)$$

وبالتالي: $\forall z\in D$ فإن:

$$|\sin z| \le |ch(1)| = \frac{e-e^{-1}}{2} = \frac{e^2+1}{2e}$$

* سؤال:

هل التابع العقدي: $f(z)=\sin z$ محدود على $\mathbb{C}$ ؟؟

الجواب: لا، لأن $f(z)=\sin z$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ وليس بتابع ثابت.

* وظيفة :

ليكن : $f(z)=ze^{z^3}$ تابع عقدي معرف على $D(0,1)$ أثبت أن $f(z)$ محدود على $D(0,1)$.

* * *

انتهت المحاضرة السادسة

* المحاضرة السابعة :- الأربعاء ٢٦/٣/٢٠١٤ م.

** الفصل الثاني : متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدية **

* تعريف :

نعرف متتالية التوابع العقدية بأنها متتالية عناصرها توابع عقدية معرفة على نفس المجموعة ولتكن $A \subset \mathbb{C}$ وهي من الشكل :

$$\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \{f_1(z), f_2(z), \dots\}$$

حيث ندعو التابع $f_n(z)$ «بتابع الحد العام» وهو من الشكل :

$$f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f_n(z)$$

ونقول عن المتتالية $\{f_n(z)\}$ أنها متقاربة من التابع $f(z)$ في A إذا تحقق الشرط التالي :- $\forall z \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$

بمعنى آخر :

$$\forall \varepsilon>0 , \exists \delta(\varepsilon)>0 \quad ; \forall n > \delta(\varepsilon) \quad ;$$

$$\forall z \in A : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

وبما أن $\mathbb{C}$ فضاء تام فيمكن كتابة الشرط السابق كما يلي :

$$\forall \varepsilon>0 \;: \exists \delta(\varepsilon)>0 \;; \; \forall n,m > \delta(\varepsilon) \;; \forall z \in A :$$
$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

* مبرهنة :

بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع العقدية المستمرة على A والمتقاربة من التابع $f(z)$ عندئذٍ التابع $f(z)$ مستمر على A.

الإثبات : بما أن $\{f_n(z)\}$ متقاربة من $f(z)$ فإنه :

$$\forall \varepsilon>0 \;: \exists \delta(\varepsilon)>0 \;; \forall n > \delta(\varepsilon)$$
$$\forall z \in A : \; |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

وبما أن $f_n(z)$ تابع مستمر على A فإنه من أجل $z_0 \in A$ يكون :

$$\forall \varepsilon>0 \;; \exists \delta(\varepsilon)>0 \;: |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \;: |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ومنه من أجل $z_0 \in A$ يمكن أن نكتب :- $|f(z) - f|$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z_0) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|$$

فرضنا $f_n(z)$ تتقارب من $f(z_0)$.

$f_n(z_0)$ متقارب من $f(z_0)$ $\Rightarrow |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

* مبرهنة :- «هامة»

بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع المقدية المعرفة على A والمتقاربة من $f(z)$ وبفرض γ منحني بسيط واقع في A عندئذٍ :-

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

الإثبات :- بما أن $\{f_n(z)\}$ متقاربة من $f(z)$ فإنه :-

$\forall \varepsilon > 0$ $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

ومنه :
$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f_n(z) - f(z)\,dz\right|$$

$< \varepsilon\, \ell(\gamma)$ ← حسب الخاصة (5) من خواص التكامل.

نجعل $n \to \infty$ و $\varepsilon \to 0$ فنجد :-

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\gamma f(z)\,dz$$

* مبرهنة :-

بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع التحليلية على المنطقة D والمتقاربة من $f(z)$ عندئذٍ :- $f(z)$ تابع تحليلي على D.

الإثبات : بفرض γ منحني بسيط مغلق واقع في D عندئذٍ :-

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$$

حسب المبرهنة السابقة.

«لأن $f_n(z)$ تحليلي حسب مبرهنة كوشي تكامله $= 0$ ».

وهو المطلوب حسب مبرهنة تقول :-

Sundus stationery

نتيجة عكس كوشي: «إذا كان $\int_\gamma f(z)dz=0$ أياً كان γ منحني مغلق واقع في D فإن $f(z)$ تحليلي».

* مبرهنة:

بفرض $\{f_n(z)\}$ متتالية من التوابع التحليلية على D والمتقاربة من $f(z)$ عندئذٍ: $\{f'_n(z)\}$ متقاربة من $f'(z)$.

الإثبات:

بما أن $\{f_n(z)\}$ متقاربة من $f(z)$ فإن:

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$$

ونفرض γ منحني دائرة مركزها a ونصف قطرها r واقعة في D عندئذٍ:

$$|f'_n(z)-f'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right|$$

حسب صيغ كوشي التكاملية:

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma\frac{f_n(z)-f(z)}{(z-a)^2}dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r^2}\cdot 2\pi r$$

حسب الخاصة (5) حيث: $|z-a|^2=r^2$، $2\pi r$ طول γ.

$$=\frac{\varepsilon}{r}$$

بجعل $n\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ فنجد: $f'_n(z)\xrightarrow[n\to\infty]{}f'(z)$

* * *

انتهت المحاضرة السابعة.

* المحاضرة الثامنة :- الثلاثاء: ١/٤/٢٠١٤م.

* تعريف:

نعرف متسلسلة التوابع العقدية بأنها متسلسلة حدها العام تابع عقدي من الشكل: $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ حيث $A \subset \mathbb{C}$.

$$z \longmapsto f_n(z)$$

ونكتب: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots$

- نرمز ب $\{S_n(z)\}$ لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة حيث يكون حدها العام: $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

- نعرف $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ متسلسلة الباقي للمتسلسلة السابقة فيكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

- نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ أنها متقاربة ومجموعها $S(z)$ إذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$

* اختبار وايرشتراس لتقارب متسلسلات التوابع العقدية:-

بفرض $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متسلسلة حقيقية موجبة ومتقاربة ومجموعها M.

ونفرض $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متسلسلة توابع عقدية تحقق

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |f_n(z)| \leq M_n$$

عندئذ: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة.

* تمرين:-

ادرس تقارب متسلسلات التوابع العقدية التالية:-

* [1] $\sum \frac{z^n}{n^2} \; : \; z \in D(0,1)$

نلاحظ أنه: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ z \in D(0,1) : \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} < \frac{1}{n^2}$

لو كانت n بدل n^2 لن نستطيع أن نحكم عليها (متقاربة أم لا).

وبما أنه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة حسب وايرشتراس: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ متقاربة.

* $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n(n+1)}$; $z \in \mathbb{C}$

نلاحظ أن :

$\forall z \in \mathbb{C}$: $\left|\dfrac{\cos n|z|}{n(n+1)}\right| \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\Rightarrow$ متقاربة حسب وايرشترلس

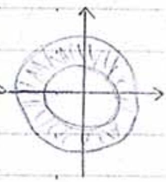
* $\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot z^n}{n!}$; $z \in D(0,3)$ $\rightarrow$ قرص مركزه $= 0$ ونصف قطره $= 3$

$\forall z \in D(0,3)$; $|z| < 3$

ومنه :

$\left|\dfrac{2^n \cdot z^n}{n!}\right| = \dfrac{2^n |z|^n}{n!} \leq \dfrac{2^n \cdot 3^n}{n!} = \dfrac{6^n}{n!}$

* $\boxed{4}$ $\displaystyle\sum \frac{1}{z^n \cdot n^2}$; $z \in R(0,1,2)$ $\rightarrow$ حلقة مركزها 0 ونصف قطرها الداخلي $= 1$
ونصف قطرها الخارجي $= 2$



$\forall z \in R(0,1,2)$; $1 < |z| < 2$

$\left|\dfrac{1}{z^n \cdot n^2}\right| = \dfrac{1}{|z|^n \cdot n^2} < \dfrac{1}{n^2}$

لدينا $|z| > 1 \Leftarrow \frac{1}{z} < 1$

* $\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}$; $z \in D(0,2)$ $\rightarrow$ قرص مركزه (0) ونصف قطره $= 2$

مراجحة المثلث الإصدار الثاني

$\forall z \in D(0,2)$; $|n+z| \geq |n - |z||$

$\geq |n-2|$

$\Rightarrow |n+z|^2 \geq (n-2)^2$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{(n+z)^2}\right| = \dfrac{1}{(n+z)^2} \leq \dfrac{1}{(n-2)^2}$ $\rightarrow$ متقاربة حسب ريمان .

* تعريف :

بفرض z_0 ثابت عقدي و z متحول عقدي و $\{a_n\}$ متتالية عقدية عندئذ ندعو السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ متسلسلة قوى مركزها z_0 وأمثالها المتتالية $\{a_n\}$.

* مبرهنة : «دون إثبات».

بفرض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ متسلسلة قوى عندئذٍ يوجد $r\in[0,+\infty]$ بحيث تكون المتسلسلة متقاربة بالإطلاق داخل القرص $D(z_0,r)$ ومتباعدة خارجه حيث r يُعطى بالقانون :

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

ندعو r بنصف قطر التقارب كما ندعو $D(z_0,r)$ بقرص التقارب.

* تمرين :

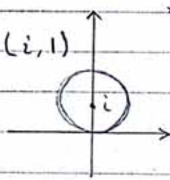
أوجد قرص التقارب لمتسلسلات القوى التالية :

* 1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2n^3(z-i)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

الحل :

$$r=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{2n^3}}=1\Rightarrow D(i,1)$$



$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^3}=1$, $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=n}$

الجذر النوني لأي شيء معلوم $=1$. ولكن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$.

* 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty\Rightarrow \mathbb{C}$$ المتسلسلة متقاربة على

* 3) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow$$ فالمتسلسلة متقاربة فقط عند مركزها.

* ملاحظة :.

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ متسلسلة قوى متقاربة في $D(0,1)$. من جهة
أخرى هي متسلسلة هندسية حدها الأول 1 وأساسها z ; بالتالي
إذا كان $z\in D(0,1)$ مجموعها يكون : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$; $|z|<1$

* مبرهنة :. دون إثبات :.

كل تابع تحليلي يمكن كتابته على شكل متسلسلة قوى ، وكذلك كل متسلسلة قوى هي تابع تحليلي.

* تمرين :

اكتب التوابع التالية على شكل متسلسلة قوى :.

* $\boxed{1}$ $f(z)=\frac{1}{1+z}$

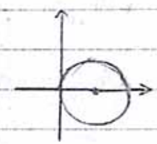
$$=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n \quad ; |-z|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad ; |z|<1$$

* $\boxed{2}$ $f(z)=\frac{1}{z}=$

$$=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad ; |z-1|<1$$ ← طويلة

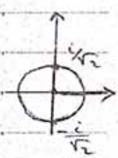
↳ حسب التمرين $\boxed{1}$ ↑



* $\boxed{3}$ $f(z)=\frac{1}{1+2z^2}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2z^2)^n \quad ; |2z^2|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . 2^n . z^{2n} \quad ; |z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$$ → $D(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ هنا دائرة التقارب



* $\boxed{4}$ $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ → $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (من الملاحظة)..

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad ; |z|<1$$

لأن $n=0$ رح يروح بالمشتقة.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad ; |z|<1$$

* وظيفة :-

$\boxed{1}$ ادرس تقارب متسلسلات التوابع العقدية التالية :-

* $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^z}{(n+1)^2} \quad ; z \in D(0,1)$ → [illegible]

* $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin z}{n^2(n+1)} \quad ; z \in A = \{ z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}(z) < 1 \}$

$\boxed{2}$ أوجد شرط التقارب لمتسلسلات القوى التالية.

* $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$ ← سؤال دورة

* $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\,(z+1-i)^n$

* * *

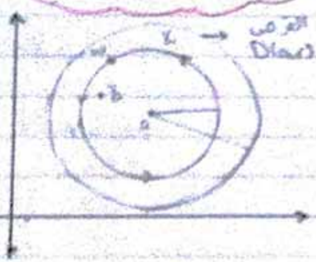
انتهت المحاضرة الثامنة.

* مبرهنة تايلور:

ليكن $f(z)$ تابع تحليلي على القرص $D(a,r)$ عندئذ يمكن نشر التابع $f(z)$ في D على شكل متسلسلة قوى من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

حيث تسمى هذه المتسلسلة بمتسلسلة تايلور للتابع $f(z)$ عند النقطة a.



الإثبات: ليكن γ_1 منحني دائرة مركزها a ونصف قطرها r_1 حيث $r_1<r$. القرص $D(a,r)$

ثم ليكن w نقطة واقعة على γ_1 و z نقطة اختيارية داخل γ_1. عندئذ من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ يكون:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{(w-a)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}$$

نضيف ونطرح a — نأخذ $w-a$ عامل مشترك

$$=\frac{1}{(w-a)}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\cdots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n+\frac{\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}\right]$$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

لأن مجموع حدود المتسلسلة الهندسية

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{2\pi i}f(w)$ ثم نكامل على γ_1:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw=\overbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)}dw}^{f(a)}+\overbrace{\frac{(z-a)}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw}^{(z-a)\cdot f'(a)}+\cdots$$

$$+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

التابع معرف على قرص محدود ⟸ التابع محدود.

بما أنَّ $f(w)$ تحليلي على D فهو معرف على D وبالتالي محدود على D أي:

$$\exists M>0 \ , \ \forall w\in D : |f(w)| \le M$$

كذلك:

$$\left|\frac{1}{(w-a)-(z-a)}\right| \le \frac{1}{r_1-|z-a|}$$

$w-a > z-a$ من الرسمة

$(w-a)$ ثابت لأنها تتحرك على γ (المتراجحة المثلثية)

أيضاً:

البسط $a-z$ أصغر من المقام

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = k < 1$$

ومنه:

$$|R_{n+1}| \le \frac{1}{2\pi} \cdot k^{n+1} \cdot \frac{M}{r_1-|z-a|} \cdot 2\pi r_1$$

L [illegible]

$$= \frac{M \cdot r_1}{r_1-|z-a|} \cdot k^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

لـ $n!$ أتت من صيغة كوشي التكاملية — لم الطرف الأول $= f(w)$ من كوشي التكاملية

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad *$$

* ملاحظة:

إذا كانت $a=0$ عندئذٍ يصبح التسلسلة من الشكل:

ماكلوران عوضنا بالمركز حول الصفر $\boxed{a=0}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

حيث سمي هذه السلسلة بسلسلة ماكلوران للتابع $f(z)$.

* تمرين: أوجد متسلسلة ماك لوران للتوابع التالية:

* [1] $f(z)=e^{z}$

الحل: نلاحظ أن:

$\forall n\in N^{*} : f^{(n)}(z)=e^{z}$

$\Rightarrow \forall n\in \mathbb{N} : f^{(n)}(0)=1 \rightarrow$ نعوض في قانون $f(z)$.

ومنه:

$$f(z)=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

$e^{-z}=\frac{1}{e^{z}}=\frac{1}{e^{z}}$ منشور

* [2] $f(z)=\cos z$ (تابع زوجي)

الحل: نلاحظ أن:

$f(z)=\cos z \Rightarrow f(0)=1$ أول حد من أجل $n=0$

$f'(z)=-\sin z \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(z)=\cos z \Rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(z)=-\sin z \Rightarrow f'''(0)=0$

ومنه:

$$f(z)=\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\frac{z^{6}}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{2n!}$$

* [3] $f(z)=ch\,z$

الحل: نلاحظ أن:

$ch\,z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

$ch(0)=1 \rightarrow \cos$ مثل

$sh(0)=0 \rightarrow \sin$ مثل

$f(z)=ch\,z \Rightarrow f(0)=1$

$f'(z)=sh\,z \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(z)=ch\,z \Rightarrow f''(0)=1$

$f'''(z)=sh\,z \Rightarrow f'''(0)=0$

ومنه:

$$f(z)=ch\,z=1+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\frac{z^{6}}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n!}$$

* $\boxed{4}$ $f(z)=\ln(1+z)$

الحل: نلاحظ أن:

$f(z)=\ln(1+z) \Rightarrow f(0)=0$

$f'(z)=\frac{1}{1+z} \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(z)=\frac{-1}{(1+z)^2} \Rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(z)=\frac{2}{(1+z)^3} \Rightarrow f'''(0)=2$

$f''''(z)=\frac{-3.2}{(1+z)^4} \Rightarrow f''''(0)=-3.2$

$\vdots$

ومنه:

$$f(z)=0+z-\frac{z^2}{2}+\frac{\cancel{2}z^3}{3\cancel{2}}-\frac{z^4}{4}+\text{——}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

* طريقة ثانية:

$$\frac{1}{1+z}=1+z+z^2-z^3+z^4 \text{——}$$

نختار ثابت التكامل بعد إجراء تكامل الطرفين:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}\text{——}$$

عند الصفر.

* وظيفة:

أوجد منشور ماك لوران للتوابع التالية:

* $\boxed{1}$ $f(z)=\sin z$ يمكننا أن نكامل ولكن يفضل استخدام القوانين

* $\boxed{2}$ $f(z)=\operatorname{sh} z$

* $\boxed{3}$ $f(z)=\frac{1}{i-z} \rightarrow$ حل بطريقتين: 1- نسحب عامل مشترك ——

* * *

(انتهت المحاضرة الثامنة)

عدم تعريف $\frac{\alpha}{0}$ لا نا

عدم التعيين هو حالة خاصة من عدم التعريف

عدم تعيين $= \frac{0}{0}$

* المحاضرة: العاشرة:- الخميس: ٩/٤/٢٠١٤م.

* تمرين:- أوجد سلسلة تايلور للتوابع التالية:

*[1] $f(z)=e^z$ عند $a=1$.

الحل. نلاحظ أنه:

$$\forall n\in\mathbb{N} : f^{(n)}(z)=e^z \Rightarrow f^{(n)}(1)=e$$

ومنه:

$$f(z)=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

لأنه: $\forall n\in\mathbb{N} : f^{(n)}(1)=e$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(z-1)^n}{n!}$$

*ملاحظة: هنا لا نستطيع أن نفرض n قبل أن ننشر.

- طريقة ثانية:

$$f(z)=e^z=e.e^{z-1}=e\left[1+\frac{(z-1)}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\cdots\right]$$

نشر سالكوران (أخذ في المحاضرة السابقة) $z-1=0$.

*[2] $f(z)=\cos z$ عند النقطة $a=\frac{\pi}{2}$.

نلاحظ أنه:

$$f(z)=\cos z \Rightarrow f(\tfrac{\pi}{2})=0$$
$$f'(z)=-\sin z \Rightarrow f'(\tfrac{\pi}{2})=-1$$
$$f''(z)=-\cos z \Rightarrow f''(\tfrac{\pi}{2})=0$$
$$f'''(z)=\sin z \Rightarrow f'''(\tfrac{\pi}{2})=1$$

ومنه:-

$$f(z)=\underset{\text{أو لاحد}}{\cos z}=0-(z-\tfrac{\pi}{2})+(z-\tfrac{\pi}{2})^3/3!-(z-\tfrac{\pi}{2})^5/5!+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-\tfrac{\pi}{2})^{2n+1}/(2n+1)!$$

- طريقة ثانية:- باستخدام ماكلوران (أي النشر عند الصفر):

$$f(z)=\cos z=\cos\left[(z-\tfrac{\pi}{2})+\tfrac{\pi}{2}\right]=-\sin(z-\tfrac{\pi}{2})$$

$$=-(z-\tfrac{\pi}{2})+\frac{(z-\frac{\pi}{2})^3}{3!}-\frac{(z-\frac{\pi}{2})^5}{5!}+\cdots$$

إرجاع

$$\cos(\alpha+\tfrac{\pi}{2})=-\sin\alpha$$

$\boxed{3}$* $f(z)=\frac{1}{1-z}$ عند النقطة $a=i$:

الحل: نلاحظ أنّ :

$$f(z)=\frac{1}{1-z} \Rightarrow f(i)=\frac{1}{1-i}$$

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow f'(i)=\frac{1}{(1-i)^2}$$

$$f''(z)=\frac{2}{(1-z)^3} \Rightarrow f''(i)=\frac{2}{(1-i)^3}$$

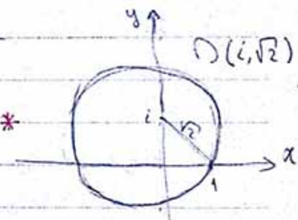
$$f'''(z)=\frac{6}{(1-z)^4} \Rightarrow f'''(i)=\frac{6}{(1-i)^4}$$

$$f(z)=\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)$$

ومنه :

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-i}+\frac{(z-i)}{(1-i)^2}+\frac{(z-i)^2}{(1-i)^3}+ \text{---}$$

$D(i,\sqrt{2})$



* ملاحظة: حتى لو كان نصف القطر أصغر من $\sqrt{2}$ لا يتغير الشرط لأنّ التابع تحليلي (حسب مبرهنة).

* لا يمكن أن ننشر على $\mathbb{C}/\{1\}$ لأنّ النشر يتم على قرص يجب تعيين مركزه ونصف قطره.

- طريقة ثانية :

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}$$

حسب مبرهنة شهيرة أخذت في المحاضرة السابقة $\left(\frac{1}{w-z}\right)$ سنتبع نفس الخطوات.

$$=\frac{1}{(1-i)}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{z-i}{1-i}\right)}\right)$$ ← أخرجنا $\frac{1}{1-i}$ عامل مشترك

$$=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n \quad ; \left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \quad ; |z-i|<\sqrt{2}$$

*4 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ عند النقطة $a=i$:

الحل. نلاحظ أن:

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-i)^2}+\frac{2(z-i)}{(1-i)^3}+\frac{3(z-i)^2}{(1-i)^4}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z-i)^n}{(1-i)^{n+2}} \quad ; \quad z\in D(i,\sqrt{2})$$

طريقة ثانية:

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}} \quad ; \quad |z-i|<\sqrt{2}$$

لم يبدأ عند $n=0$ (إجري تغيير بال n)

*5 $f(z)=\frac{2z+1}{z^2-3z+2}$ عند النقطة $a=i$:

الحل:

$$f(z)=\frac{2z+1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2} \quad A=-3,\ B=5$$

لنرتب الكسور

$$=\frac{3}{1-z}-\frac{5}{2-z}$$

لسهولة الشرح ضربنا (-)

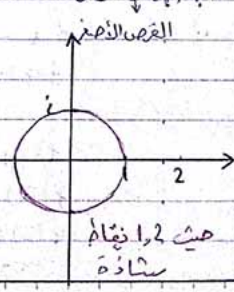
$$=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} \quad ; \quad z\in D(i,\sqrt{2})$$

$z\in D(?,?)$

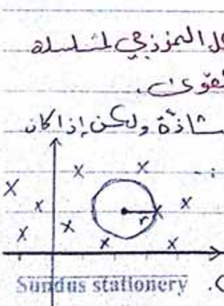
لم يمكن الاستفادة من التمرين السابق.

القرص الأصغر

الشكل النهائي لسلسلة القوى $=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{(1-i)^{n+1}}-\frac{5}{(2-i)^{n+1}}\right](z-i)^n$



*ملاحظة: لا يمكننا النشر عند نقطة شاذة ولكن إذا كان لدينا عدة نقاط شاذة كيف نختار القرص؟؟ :



نبحث عن أقرب نقطة شاذة من المركز

ونأخذ عليها قرص وعندها يكون نصف القطر

هو المسافة بين النقطتين (المركز والشاذة).

حيث 1,2 نقاط شاذة

* تمرين: أوجد التابع العقدي التحليلي عند النقطة $a=0$ والذي يحقق

$$\begin{cases} f(0)=1 & \rightarrow \text{شرط ابتدائي} \\ f'(z)=3i\,f(z) & \rightarrow y'=\alpha y \end{cases}$$

معادلة تفاضلية بدلالة x و y ويكون:

الحل: بما أن التابع $f(z)$ تحليلي عند النقطة $a=0$ ، عندئذٍ يمكن كتابة التابع $f(z)$ على شكل سلسلة قوى مركزها $a=0$ من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

- نلاحظ أن: $f(0)=1$ ،

$$f'(z)=3i\,f(z)\Rightarrow f'(0)=3i\,f(0)=3i$$

$$f''(z)=(f'(z))'=(3i\,f(z))'=3i\cdot 3i\,f(z)\qquad f''(z)=(3i)^2 f(z)\Rightarrow f''(0)=(3i)^2 f(0)=(3i)^2$$

$$f'''(z)=(3i)^3 f(z)\Rightarrow f'''(0)=(3i)^3 f(0)=(3i)^3$$

$$\vdots$$

ومنه:

$$f(z)=1+\frac{3i}{1!}z+\frac{(3i)^2}{2!}z^2+\frac{(3i)^3}{3!}z^3+\cdots$$

$$=1+\frac{3iz}{1!}+\frac{(3iz)^2}{2!}+\frac{(3iz)^3}{3!}+\cdots=e^{3iz}$$

للتأكد من صحة الجواب: نعود للشروط هل هي محققة؟؟ (الشرط الابتدائي) $e^{3i0}=e^0=1$ ✓ وكذلك: $f'(e^{3iz})=3ie^{3iz}=3i\,f(z)$ ✓ محقق...

* تمرين: أوجد التابع العقدي التحليلي عند النقطة $a=0$ والذي يحقق

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(z)=f^2(z) \end{cases}$$

$y'=y^2$

$\frac{dy}{dx}=y^2$

$\Rightarrow\int\frac{dy}{y^2}=\int dx$

نكامل:

$-\frac{1}{y}=x+c$

$\Rightarrow y=\frac{1}{c-x}$

$y=\frac{1}{c-0}\Rightarrow 1=\frac{1}{c}$

الحل: نلاحظ أن: $f(0)=1$

$$f'(z)=f^2(z)\Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(z)=2f(z)\cdot f'(z)\xrightarrow{\text{نعوض}}=2f^3(z)\Rightarrow f''(0)=2$$

$$f'''(z)=6f^2(z)\cdot f'(z)=6f^4(z)\Rightarrow f'''(0)=6$$

$f(0)=1$

تأكد من صحة الجواب بنفسك من خلال $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}$
الشروط.

* وظيفة:

أوجد متسلسلة تايلور للتوابع التالية:

* 1 $f(z) = \ln(z)$ عند النقطة $a = 1$.

* 2 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ عند النقطة $a = 1 \cdot i$.

لـ نجزئه كسور $\frac{1}{z+i}$, $\frac{1}{z-i}$

* 3 أوجد التابع العقدي التحليلي عند النقطة $a = 1$ الذي يحقق:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(z) = f(z) \end{cases}$$

* * *

انتهت المحاضرة المباشرة.

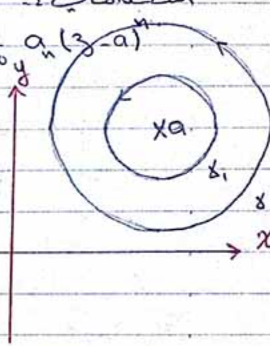
* متسلسلة لوران:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على $R(a,r_1,r_2)$ ونفرض:

$\gamma_1 = C(a,r_1)$, $\gamma_2 = C(a,r_2)$

منحنيين دائريين واقعين على محيط الحلقة عندئذٍ يمكن كتابة التابع $f(z)$ على الشكل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$



$$; \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\, dz$$

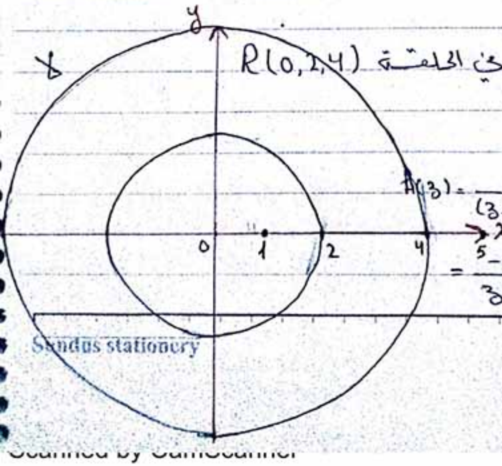
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

حيث γ منحني دائرة واقعة داخل الحلقة.

- نسمي هذه السلسلة بسلسلة لوران للتابع $f(z)$ عند النقطة a.
- نسمي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ بالجزء الرئيسي.
- كما نسمي السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ بالجزء التحليلي.

* تمرين:

أوجد متسلسلة لوران للتابع $f(z)=\frac{4}{z^2-6z+5}$ في الحلقة $R(0,2,4)$



الحل: نضع:

$$f(z)=\frac{4}{(z-1)(z-5)}$$

تفريق كسور:

$$= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-5}$$

« يفضل دائماً أن نفرق الكسور وهذا ممكن دائماً لأننا نشتغل في $\mathbb{C}$ »

نلاحظ أنّ التابع $f(z)$ تحليلي في الحلقة $R(0,2,4)$ ومنه حسب مبرهنة لوران يمكن كتابة التابع $f(z)$ كما يلي:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \rightarrow \text{لأنّ المركز} = 0$$

نفرض لامنحني دائرة واقعة في الحلقة عندئذٍ:

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz$$

$z \rightarrow$ دائماً منرفعها للبسط

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{z^{n-1}}{(z-1)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{z^{n-1}}{(z-5)}dz$$

$$=-1+0=-1$$

حسب كوشي التكاملية

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z^{n+1}(z-1)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z^{n+1}(z-5)}$$

جزئنا حسب (صيغ كوشي التكاملية)

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\frac{dz}{z^{n+1}}}{(z-1)}+\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\frac{dz}{(z-1)}}{z^{n+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\frac{dz}{z-5}}{z^{n+1}}$$

$$=-1+\frac{-1}{n!}\left[\frac{1}{1-z}\right]^{(n)\rightarrow\text{مشتق}}_{z=0\rightarrow\text{عند}}+\frac{-1}{n!}\left[\frac{1}{5-z}\right]^{(n)}_{z=0}$$

مشان مايطلع ال $\ominus$ بالمشتق

$$=-1+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{1}-\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{5^{n+1}}=\frac{-1}{5^{n+1}}$$

ومنه:

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{z^n}}_{\text{الجزء الرئيسي}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}z^n}_{\text{الجزء التحليلي}}$$

* طريقة ثانية:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{-1}{5-z}$$

$\left(\frac{-1}{z-1}\right)$ لنفسها

$$= \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{-1}{5} \frac{1}{1-\frac{z}{5}} \quad ; \quad 2 < |z| < 4$$

$$= \frac{-1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n \rightarrow$$ نشر حسب تايلور

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n}}_{\text{الجزء الرئيسي}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} z^n}_{\text{الجزء التحليلي}}$$

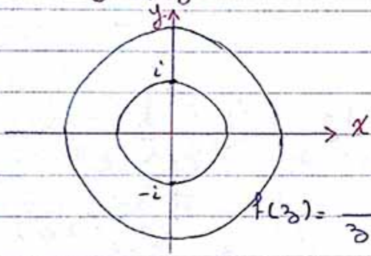
* تمرين :-

أوجد متسلسلة لوران للتابع:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$$

وذلك في المناطق التالية :-

1. $|z| < 1$
2. $|z| > 2$
3. $1 < |z| < 2$



الحل:

نضع:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1}$$

1. من أجل $|z| < 1$:-

$$f(z) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - 2 \frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n}}$$

هاد كلو جزء تحليلي، لا يوجد جزء رئيسي، لأن بالأصل التابع تحليلي، فعندما يكون التابع تحليلي تقلب المتسلسلة لتايلور

[2] من أجل $|z|>2$: $\Leftarrow$ $\boxed{\frac{1}{z}<\frac{1}{2}}$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2}{z}\right)}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{z^{2n}}}$$

كله الجزء الرئيسي ,لا يوجد جزء تحليلي

* ملاحظة :

عندما يكون النشر على قرص ينتج الجزء التحليلي ,أما عندما يكون النشر بجوار ∞ ينتج الجزء الرئيسي أما عندما يكون النشر على حلقة ينتج الرئيسي والتحليلي .

[3] من أجل : $1<|z|<2$:

أصغر ← التحليلي

أكبر ← الرئيسي

$$f(z)=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-z^n}{2^{n+1}}}_{\text{الجزء التحليلي}}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{z^{2n}}}_{\text{الجزء الرئيسي}}$$

* وظيفة :

- أوجد متسلسلة لوران للتوابع التالية :

[1] $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$; $1<|z|<2$

[2] $f(z)=\dfrac{5z+2i}{z(z+i)}$; $1<|z-i|<2$ ← حلقة مركزها i, نصف قطرها الأول = 1 , الثاني = 2

[3] $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; $z\in R(1,0,\infty)$ → $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

* * *

انتهت المحاضرة الحادية عشر

مجموعة تعريف التابع مجموعة تعريف البسط ∩ مجموعة تعريف المقام / القيم التي تعدم المقام

*المحاضرة الثانية عشر :- الأربعاء: ١٦/٤/٢٠٢٤م.

** الفصل الثالث : نظرية الرواسب **

* تعريف :

بفرض $f(z)$ تابع عقدي عندئذٍ نقول عن $a \in \mathbb{C}$ أنها نقطة شاذة بالنسبة للتابع $f(z)$ إذا كان التابع $f(z)$ غير تحليلي عند a.

كل نقطة يحدها الفضاءات الطوبولوجية غير ذلك نقول عدد أو نقطة في المستوي.

* تعريف :-

بفرض $a \in \mathbb{C}$ نقطة شاذة بالنسبة للتابع $f(z)$ عندئذٍ نقول عن a أنها نقطة شاذة معزولة / منعزلة إذا وجد قرص من الشكل $D(a,r)$ (مفتوح) لا يحوي نقاط شاذة بالنسبة للتابع $f(z)$ سوى النقطة a.

* مثال: $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-2)^2}$

← يوجد ثلاث نقاط معزولة هي $i,-i,2$ (معزولة لأنه عددها منتهي)

$a=i,-i,2$ نقاط شاذة بالنسبة لـ $f(z)$.

* $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ ← يمثل تابع كسري مثلي (يكون التابع sin معرف عندما يكون ما داخله معرف)

$a=0$ نقطة شاذة لـ $f(z)$.

* $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ نلاحظ أن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي الصفر والقيم التي تعدم المقام وهي:-

يعني الشيء لو كان بدل $\sin$ ال $\cos$ أو $\sin$ نفسه:

$z=\frac{1}{\pi k}$; $k \in \mathbb{Z}$

$z=0$ نقطة شاذة غير معزولة.

* تعريف :

بفرض $f(z)$ تابع عقدي معرف عند النقطة $a \in \mathbb{C}$ عندئذٍ نقول عن a أنها نقطة شاذة قابلة للإزالة «كاذبة» إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z)$ موجودة.

$f(x)=\sin x \; ; x=0$, $x \neq 0$, $\frac{\sin x}{x}$

* مثال: $f(z)=\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$

نلاحظ أن: النهاية :-

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين وعدم تعريف، نشتق حسب أوبيتال.

$(\sin z^2)'=2z\cos z^2$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z)=\frac{\sin z}{2z\cos z^2}=$$

أيضاً: $\sin z^2$ لا يعد لي أن أكامل إلا بالشكل $\sin(\alpha z+\beta)$

$(\cos f(z))'=f'(z)\cos z$*

$\pi \simeq 3,1415 \Rightarrow \sqrt{\pi} \simeq 1,7$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2\cos z^2} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2}$$

ومنه: $a=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.

* تعريف:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على المنطقة D عندئذٍ نقول عن $a\in D$ أنه صفر مضاعف للتابع $f(z)$ من المرتبة n إذا كان:

$$f(a)=f'(a)=\dots\dots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad ; \quad f^{(n)}(a)\neq 0$$

صفر = جذر

مثال:

$f(z)=(z-i)^3$ عندئذٍ: $a=i$ صفر مضاعف من المرتبة الثالثة.

* تعريف:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي في جوار اللانهاية (خارج قرص مركزه 0) عندئذٍ نقول أن التابع $f(z)$ صفر في اللانهاية إذا كان $a=0$ صفر للتابع $f\left(\frac{1}{z}\right)$

مثال:

$f(z)=\frac{1}{z^2+2z+i}$ نحسب:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+i}$$

نوحد مقامات المقام فتصبح:

$$=\frac{z^2}{1+2z+iz^2}$$

نلاحظ أن $a=0$ صفر للتابع $f\left(\frac{1}{z}\right)$ ومنه للتابع $f(z)$ صفر في اللانهاية.

* أنواع النقاط الشاذة:

بفرض $a\in\mathbb{C}$ نقطة شاذة بالنسبة للتابع $f(z)$، وبفرض:

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ عند النقطة a

عندئذٍ يميز ثلاث حالات من النقاط الشاذة وهي:

1. نقطة شاذة قابلة للإزالة:
إذا كان الجزء الرئيسي لسلسلة لوران معدوم.
مثال:
$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$ النشر في جوار الصفر
ومنه: $a=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة (نقطة شاذة)

2. نقطة شاذة قطب من المرتبة n:
إذا كان الجزء الرئيسي لسلسلة لوران محدود من الشكل: $f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}$

$$+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-a)}+a_0+a_1(z-a)+\cdots$$

فإذا كانت $n=1$ عندئذ نسمي a قطب بسيط.
إذا كانت $n=2$ عندئذ نسمي a قطب مضاعف

* مبرهنة:
تكون النقطة الشاذة $a\in\mathbb{C}$ قطب من المرتبة n للتابع $f(z)$ إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)$ موجودة ولا تساوي الصفر.
مثال:

$$f(z)=\frac{e^z+1}{(z-1)(z-2)^2(z-3)^3}$$

$a=1$ قطب بسيط
$a=2$ قطب مضاعف،
$a=3$ قطب مرتبة ثالثة.

3. نقطة شاذة أساسية:
إذا كان الجزء الرئيسي لسلسلة لوران غير محدود
مثال: $f(z)=\sin\frac{1}{z}$

$$f(z)=\sin\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\dots$$

نلاحظ أن $a=0$ نقطة شاذة رئيسية.

* وظيفة :-

أوجد مجموعة النقاط الشاذة للتوابع التالية وأنواعها:

* [1] $f(z)=\dfrac{1-\operatorname{ch}(z+i)}{z(z^2+1)^2}$

* [2] $f(z)=\dfrac{\sin 4z}{z^4}$

* [3] $f(z)=\dfrac{1}{\ln(z)} \rightarrow$ (نقاط شاذة 0، 1)

* * *

انتهت المحاضرة الثانية عشر

* تعريف:

بفرض $a \in \mathbb{C}$ نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$، وبفرض:

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ عند النقطة a، عندئذٍ

نسمي a_{-1} براسب التابع $f(z)$ عند النقطة الشاذة a ونكتب:

$$\text{Res}(f(z), a) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

راسب للتابع $f(z)$ تابع بمتحولين أمثال عند النقطة a — للحفظ

حيث γ منحني دائرة مركزها a. $f(x, y)$ — $\text{Res}(f(z), a)$

* تمرين: احسب الراسب للتوابع التالية:

* [1] $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ عند النقطة $a = 0$.

الحل: نلاحظ أن:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right]$$

نوزع البسط على المقام ثم نختصر

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!\,z} - \cdots$$

ومنه: $\text{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{6} \rightarrow = -\frac{1}{3!} = z$ أمثال الـ

* طريقة ثانية:

$$\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^4}\, dz$$

له حسب صيغ كوشي التكاملية يكون:

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{3!}\left[\sin z\right]'''_{z=0} = -\frac{1}{6}$$

* [2] $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ عند النقطة $a = 1$.

الحل: نلاحظ أن:

* معلومة: جون نبير (اسكوتلندي) مخترع العدد النيبري "e"

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = e \cdot \frac{e^{z-1}}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2}\left[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \text{------}\right]$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!}(z-1) + \text{------}$$

ومنه:

$$Res(f(z), 1) = e \rightarrow \quad \text{أمثال } (z-1)$$

* طريقة ثانية:

$$Res(f(z), 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi i}} \cdot \cancel{2\pi i}\left[e^z\right]'_{z=1} = e^1 = e$$

* $\boxed{3}$ $f(z) = \frac{3z-i}{z(z-i)}$ عند النقطة $a = i$:

الحل: نلاحظ أن:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z-i}$$

نفرق الكسور:

$$= \frac{1}{i} \frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{i}\right)} + \frac{2}{z-i}$$

نضيف ونطرح i ثم نسحب عامل مشترك لنحصل على الشكل $\frac{1}{i+(z-i)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{i}\right)}$

$$= \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{i}\right)^n + \frac{2}{z-i}$$

جزء رئيسي مؤلف من عنصر واحد

ومنه:

$$Res(f(z), i) = 2$$

* طريقة ثانية:

$$Res(f(z), i) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\frac{3z-i}{z}}{(z-i)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left[\frac{3z - i}{z}\right]_{z=i} = 2$$

* مبرهنة:

نفرض $a \in \mathbb{C}$ قطب من المرتبة n بالنسبة للتابع $f(z)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ عندئذٍ:

$$\boxed{Res(f(z), a) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \left[(z-a)^n \cdot f(z)\right]^{(n-1)}}$$ للحفظ

- الإثبات: بما أن a قطب من المرتبة n بالنسبة للتابع $f(z)$ فإن متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ عند النقطة a من الشكل:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

نضرب الطرفين بـ $(z-a)^n$ فنجد:

$$(z-a)^n \cdot f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + a_1(z-a)^{n+1} + \cdots$$

- نشتق الطرفين $(n-1)$ مرة فنجد:

$$\left[(z-a) f(z)\right]^{(n-1)} = (n-1)!\, a_{-1} + \underbrace{(n \cdots 2)}_{n!} a_0 (z-a)$$
$$+ a_1((n+1) \cdot n \cdots 3)(z-a)^2 + \cdots$$

«اشتققنا $(n-1)$ مرة لأنها حين سيبقى a_{-1}»

نقسم الطرفين على $(n-1)!$ ثم نأخذ النهاية عندما $z \to a$ فنجد:

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^n \cdot f(z)\right]^{(n-1)} \quad *$$

* تمرين: أوجد الراسب للتوابع التالية:

[1] $f(z) = \dfrac{3z - i}{z(z-i)}$ عند النقطة $a = i$.

* معلومة: $sh(x)$ تابع فردي متناظر بالنسبة للمبدأ (مثل $\sin(x)$). | الفرق بين $\sinh(\pi)=0$ ← لكن على المحور الحقيقي.

و $sh(\pi i)=0$ (نفس الشي) ← على المحور التخيلي.

$$Res(f(z), i) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to i} [(z-i) f(z)]$$

$$= 1 \lim_{z \to i} \left(\frac{3z-i}{z} \right) = 2$$

* ملاحظة:

إذا كانت a قطب بسيط بالنسبة للتابع $f(z)$ فإنّ:

$$Res(f(z), a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

$\boxed{2}$ * $f(z) = \dfrac{e^{z}+1}{(z-\frac{\pi}{2}i)(z^2+1)}$ عند النقطة $a = \frac{\pi}{2} i$.

« $-i$ ، $+i$ ، $\frac{\pi}{2} i$ جميعها أقطاب شاذة بسيطة »

الحل:

$$Res\left(f(z), \frac{\pi}{2} i\right) = \lim_{z \to \frac{\pi}{2} i} \left(\frac{e^{z}+1}{z^2+1} \right)$$

$$= \frac{e^{\pi/2 i}+1}{(\frac{\pi}{2} i)^2+1} = \frac{i+1}{-\frac{\pi^2}{4}+1} \quad \#$$

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i$$
$$e^{\pi i} = -1$$

$\boxed{3}$ * $f(z) = \dfrac{ch z}{(z-\pi i)^2}$ عند النقطة $a = \pi i$:

$$Res(f(z), \pi i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to \pi i} (ch z)'$$

$$= sh(\pi i) = 0$$

$$sh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\Rightarrow sh(\pi i) = 0$$

$\boxed{4}$ * $f(z) = \dfrac{ch z}{(z-\pi i)^3}$ عند النقطة $a = \pi i$

$$Res(f(z), \pi i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to \pi i} (ch z)'' = \frac{1}{2}(ch \pi i) \qquad ch(\pi i) = -1$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \#$$

* $\boxed{5}$ $f(z)=\dfrac{2z+1}{(z-i)^3(z+1)}$ عند النقطة $a=i$:

$$Res(f(z),i)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{2z+1}{z+1}\right)''$$

ملاحظة عن التمرين السابق

إذا أردنا استنتاج قانون تقريبي لـ:

$$\frac{ch\,z}{(z-\pi i)^n}=\begin{cases}\dfrac{-1}{(n-1)!} & n \text{ فردي،}\\ 0 & n \text{ زوجي،}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{-2}{(z+1)^3}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{-\cancel{2}}{(i+1)^3}\right) \qquad i^3=-i$$

$$=i^3+3i^2+3i+1$$

$$=\frac{-1}{-i-3+3i+1}=\frac{1}{2-2i} \quad \text{(نضرب بالمرافق)}$$

$$=\frac{2+i}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

** وظيفة :

احسب الرواسب التالية :

* $\boxed{1}$ $Res\left(\frac{1}{z},0\right)$

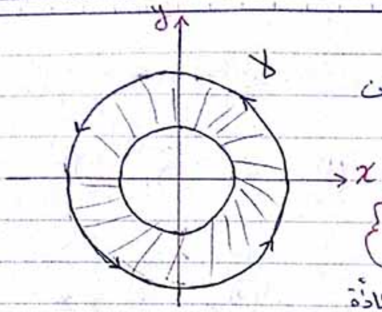
* $\boxed{2}$ $Res\left(\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{4})^2},\frac{\pi}{4}\right)$

* $\boxed{3}$ $Res\left(\frac{2z+1}{(z+i)^3},-i\right)$

* $\boxed{4}$ $Res\left(\frac{\ln z}{(z+i)^3},-i\right)$

* $\boxed{5}$ $Res\left(\frac{1}{z-\sin z},0\right)$

انتهت المحاضرة الثالثة عشر



* تعريف:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي في جوار اللانهاية عندئذ يعرف الراسب للتابع $f(z)$ في اللانهاية كما يلي:

$$\boxed{Res(f(z),\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz}$$

حيث γ منحني دائرة لا يوجد خارجها نقاط استثنائية بالنسبة للتابع $f(z)$.

* حساب الراسب في اللانهاية:

*[1] $f(z)=e^{z}$

نحسب التابع $f\left(\frac{1}{t}\right)$ ثم ننشر التابع $f\left(\frac{1}{t}\right)$ عند الصفر فيكون الراسب في اللانهاية أمثال $-t$.

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=e^{\frac{1}{t}}=1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!\,t^{2}}+\frac{1}{3!\,t^{3}}+\cdots$$

ومنه:

$$Res(f(z),\infty)=0$$

*[2] $f(z)=\dfrac{z}{z^{2}+1}$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^{2}}+1}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1+t^{2}}{t^{2}}}=\frac{t}{1+t^{2}}$$

بعد النشر (مقام المتتالية الهندسية):

$$=t\left[1-t^{2}+t^{4}-t^{6}+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow Res(f(z),\infty)=-1$$

*[3] $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t-\frac{t^{3}}{3!}+\frac{t^{5}}{5!}-\cdots}$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{5!} + \cdots\right)}} \rightarrow$$ أخرجنا t عامل مشترك

$\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-z}$ لـ مقدار غير صغير نعتبره z فيكون

ثم ننشر $= \frac{1}{t}\left[1+\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{t^2}{3!}-\frac{t^4}{5!}+\cdots\right)^2+\cdots\right)$

$$\Rightarrow Res(f(z),\infty) = -\frac{1}{6}$$ ((السالب لـ $\frac{1}{3!}$ (أمثال t))

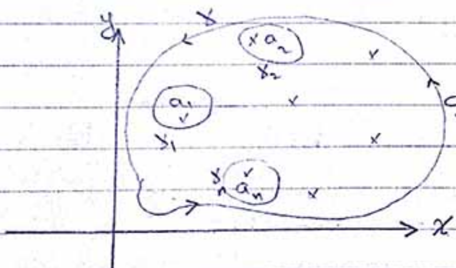
** نظرية الرواسب:

بفرض f(z) تابع تحليلي داخل وعلى منحني بسيط مغلق γ باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عندئذٍ:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), a_k)$$ الحفظ

الإثبات:

بفرض $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ منحنيات دوائر مراكزها $a_1, \ldots, a_n$ على الترتيب غير متقاطعة وواقعة تماماً داخل γ عندئذٍ:



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i\, Res(f(z), a_1) + \cdots + 2\pi i\, Res(f(z), a_n)$$

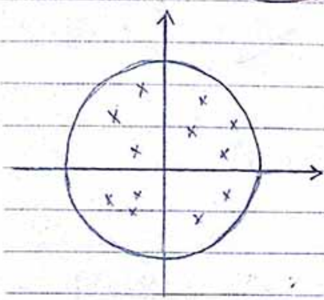
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), a_k)$$

* مبرهنة :-

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ باستثناء عدد منتهي من النقاط الشاذة $a_1, \dots, a_n$

عندئذٍ :-

$$\boxed{Res(f(z),\infty)+\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k)=0}$$



الإثبات :-

نلاحظ أنَّ :-

$$Res(f(z),\infty) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

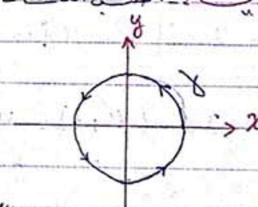
حيث γ منحني لا يحوي نقاط شاذة خارجه

$$= \frac{-1}{2\pi i}\, 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k)$$

* تمرين :- احسب التكاملات العقدية التالية :-

1 * $I_1 = \int_{\gamma} \frac{ch z}{z^5}\, dz \quad ; \quad \gamma : |z|=1$



الحل: بفرض $f(z)=\dfrac{ch z}{z^5}$ عندئذٍ :

$a=0$ قطب من المرتبة الخامسة بالنسبة للتابع $f(z)$

قانون من المحاضرة السابقة ← $Res(f(z),0) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0} [ch z]''''_{z=0}$

$$= \frac{1}{24} ch(0) = \frac{1}{24}$$

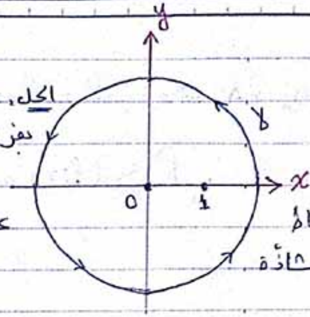
ومنه حسب نظرية الرواسب يكون :-

$$I_1 = 2\pi i\, Res(f(z),0) = \frac{\pi i}{12}$$

$\boxed{2}$ * $I_2 = \int_\gamma \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}\, dz \quad ; \gamma : |z| = 2$

الحل: نفرض ان:

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}$$



عندئذ:

0, 1 نقاط شاذة

$$Res(f(z), 0) = \lim_{z \to 0} z f(z)$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\cos \pi z}{(z-1)^2} = 1$$

$$Res(f(z), 1) = \lim_{z \to 1} \left[(z-1)^2 \cdot f(z)\right]'$$

$$= \lim_{z \to 1} \left[\frac{\cos \pi z}{z}\right]' = \lim_{z \to 1} \left[\frac{-\pi z \sin \pi z - \cos \pi z}{z^2}\right]$$

$$= 1$$

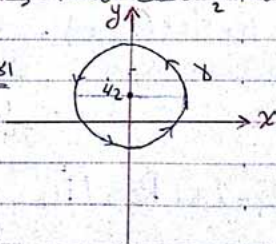
ومنه يكون:

$$I_2 = 2\pi i\left[Res(f(z), 0) + Res(f(z), 1)\right]$$

$$= 2\pi i(1+1) = 4\pi i$$

$\boxed{3}$ * $I_3 = \int \frac{dz}{z^4 + z^2} \quad , \quad \gamma : |z - \frac{i}{2}| = 1 \rightarrow$ دائرة مركزها $\frac{i}{2}$ ونصف قطرها $= 1$

الحل: نفرض ان: $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)}$



$$Res(f(z), 0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z^2+1}\right]' =$$

$$= \lim_{z \to 0} \left[\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right] = 0$$

$$Res(f(z), i) = \lim_{z \to i}\left[\frac{1}{z^2(z+i)}\right] = \frac{-1}{2i}$$

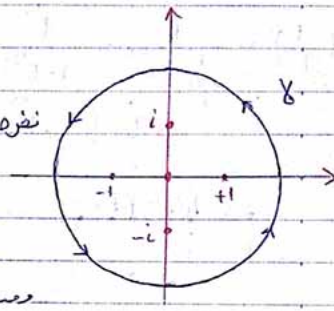
ومنه:

$$I_3 = 2\pi i\left[0 - \frac{1}{2i}\right] = -\pi \quad \#$$

$\boxed{4}$ * $I_4 = \int_\gamma \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}\, dz \quad ; \gamma : |z| = 2$

نفرض أنّ:

$$f(z) = \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4+1)}$$



نلاحظ أنّ للتابع $f(z)$ خمس نقاط شاذة وهي:

$\{0, 1, -1, i, -i\}$ جميعها تقع داخل المنحني γ

ومنه:

حسب مبرهنة ← $I_4 = -2\pi i\, Res(f(z), \infty)$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^5} + \frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^4} - 1\right)} = \frac{\frac{1+t^4+t^5}{t^5}}{\frac{1-t^4}{t^6}}$$

$$= (t + t^5 + t^6) \cdot \frac{1}{1-t^4}$$

$$= (t + t^5 + t^6)\left[1 + t^4 + t^8 + t^{12} + \cdots\right]$$

ومنه يكون:

$Res(f(z), \infty) = -1 \to$ أمثال $-t$

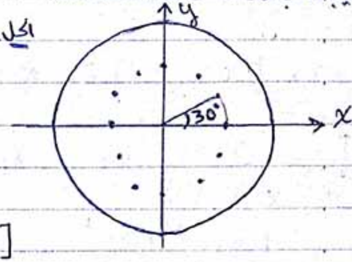
$$I_4 = 2\pi i$$

ومنه:

$\boxed{5}$ * $I_5 = \int_\gamma \frac{dz}{z^{12}-1}$; $\gamma : |z| = 2 \rightarrow$ إيجاد النقاط الشاذة: $z^{12}-1=0 \Rightarrow z^{12}=1$

أي إيجاد الجذور من المرتبة 12 للعدد (1).

الحل: نضع:



$$f(z) = \frac{1}{z^{12}-1}$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\frac{1}{t^{12}}-1} = \frac{t^{12}}{1-t^{12}}$$

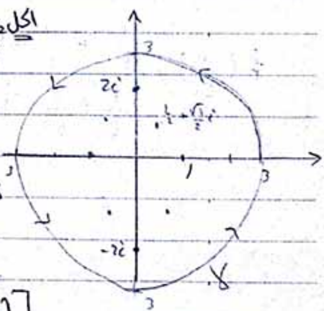
$$= t^{12}\left[1 + t^{12} + t^{24} + \text{——}\right]$$

$$\Rightarrow Res(f(z), \infty) = 0$$

$$\Rightarrow I_5 = 0$$

$\boxed{6}$ * $I_6 = \int_\gamma \frac{dz}{(z^6-1)(z^2+4)(z-4)}$; $\gamma ; |z| = 3$

الحل: نفرض أن $f(z) = \frac{1}{(z^6-1)(z^2+4)(z-4)}$



نعلم أن:

$$\sum_{k=1}^{9} Res(f(z), a_k) + Res(f(z), \infty) = 0$$

نلاحظ أن للتابع $f(z)$ تسع نقاط شاذة جميعها داخل γ ماعدا النقطة $a=4$, ومنه:

$$I_6 = -2\pi i\left[Res(f(z), \infty) + Res(f(z), 4)\right]$$

$$Res(f(z), 4) = \lim_{z\to 4} \frac{1}{(z^6-1)(z^2+4)} = \frac{1}{(4095)(20)} = \frac{1}{81900}$$

$Res(f(z), \infty) =$ لنحسب:

نوحد المقامات $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{t^6}-1\right)\left(\frac{1}{t^2}+4\right)\left(\frac{1}{t}-4\right)}$

$$= \frac{t^9}{(1-t^6)(1+4t^2)(1-4t)} = t^9\,\underbrace{\frac{1}{1-g(t)}}_{\text{جداءات ما تبقى}}$$

$$= t^9\left[1+g(t)+g^2(t)+\dots\right]$$

ومنه،

$Res(f(z),\infty) = 0$ → لأنه لا يوجد t من الدرجة الأولى.

إذاً،

$$I_6 = -2\pi i\left[\frac{1}{81900}+0\right] = \frac{-\pi i}{40950}$$ *

* وظيفة:

احسب باستخدام نظرية الرواسب التكاملات العقدية التالية:

$\sqrt{2i} = \begin{cases} 1+i \\ -1-i \end{cases}$

* $I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{(z+2)(z^2-2i)}$; $\gamma : |z+2| = 1$ → نقطة شاذة وحيدة هي (-2) والباقي برّه.

* $I_2 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z^2+1)}\,dz$; $\gamma : |z| = 2$ خصيصة الراسب عند صفر قطب 2.

* $I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z^4-1)}$; $\gamma_1 : |z| = \frac{1}{2}$ → احسب I_3 على منحنيين γ_1 و γ_2
$\gamma_2 : |z| = 2$ وانتبه هل التابع تحليلي أم لا.

* $I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{(z^4+1)(z^2+1)(z+1)}$; هنا المنحني لا مستطيل ← حيث لا مستطيل رؤوسه ;
$\frac{3}{4}+2i$, $\frac{3}{4}-2i$, $\frac{-3}{4}-2i$, $\frac{-3}{4}+2i$.

* * *

انتهت المحاضرة الرابعة عشر

** الفصل الرابع: تطبيق نظرية الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية **

* الحالة الأولى :- حساب التكاملات من الشكل:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$ ← تكامل معتل

حيث $f(x)$ تابع كسري معرّف على R (أي المقام لا ينعدم).

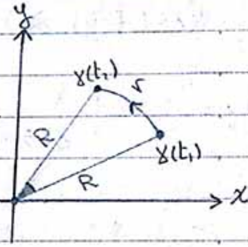
* مبرهنة جوردان الأولى :-

بفرض $f(z)$ تابع مستمر على $\mathbb{C}$ ونفرض: $\lim_{z\to\infty} z f(z) = K \; ; K \in \mathbb{C}$

ونفرض: ← أي درجة البسط أصغر من درجة المقام بواحد

$\gamma : \gamma(t) = Re^{it} \; ; t \in [t_1, t_2]$ عندئذٍ:

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = i(t_2 - t_1).K$$



الإثبات :-

نضع: $F(z) = z.f(z) - K$

$$f(z) = \frac{F(z)}{z} + \frac{K}{z}$$

ومنه:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{F(z)}{z}\,dz + \int_\gamma \frac{K}{z}\,dz$$

نجعل $R \to \infty$ فنجد:

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = 0 + \lim_{R\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{K.iRe^{it}}{Re^{it}}\,dt$$

← حسب الفرض.

$\lim z f(z) = K \Rightarrow \lim z f(z) - K = 0$

عندما $R \to \infty$ فإن: $z \to \infty$

$$= i(t_2 - t_1).K$$ *

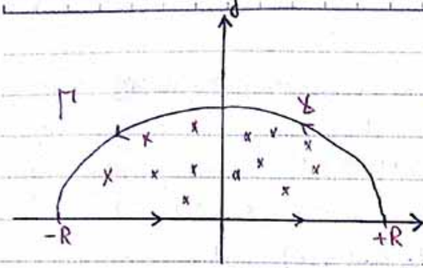
* مبرهنة :-

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد منتهٍ من الأقطاب $a_1, \ldots, a_n$ واقعة تماماً فوق المحور الحقيقي. ونفرض $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$

عندئذٍ:

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), a_k)}$$ للحفظ

- الإثبات :-



نضع: منحني $\Gamma = [-R,+R] + \gamma$

بسيط مغلق حيث :-

نصف دائرة $\gamma : \gamma(t) = Re^{it} \ ; t \in [0,\pi]$

و R كبيرة كفاية بحيث Γ تحوي $a_1, \dots, a_n$

نلاحظ أنه :-

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{[-R,+R]} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

نجعل $R \to \infty$، فحسب نظرية الرواسب وجوردان الأولى يكون :-

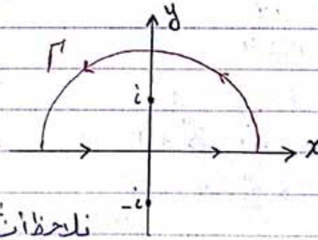
$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), a_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), a_k) \quad \#$$

* تمرين :- باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية :-

* [1] $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

الحل:



نضع، $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

نلاحظ أنه لا يوجد أقطاب لـ $f(z)$ على المحور الحقيقي، كذلك :-

درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجتين على الأقل $\to \lim_{z\to\infty} z.f(z) = 0$

ومنه يكون :-

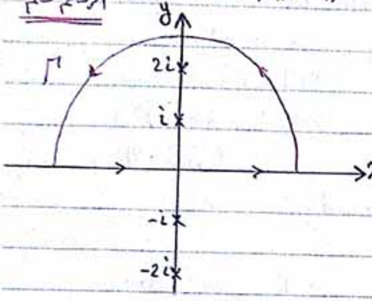
$$I_1 = 2\pi i \, Res(f(z), i)$$

* $Res(f(z), i) = \lim_{z\to i} (z-i).f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$

$\Rightarrow I_1 = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \to$ يجب أن يكون الجواب عدد حقيقي

$* \boxed{2} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

الرسم مهم



الحل: بما أن الشروط السابقة محققة، نضع:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

نقاط شاذة $i, -i, 2i, -2i$.

فوق المحور الحقيقي فقط $i, 2i$. لحساب الرواسب عند i و $2i$:

$$* \operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$$= \lim_{z \to i} \cancel{(z-i)} \frac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{6i}$$

$$* \operatorname{Res}(f(z), 2i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{-1}{12i}$$

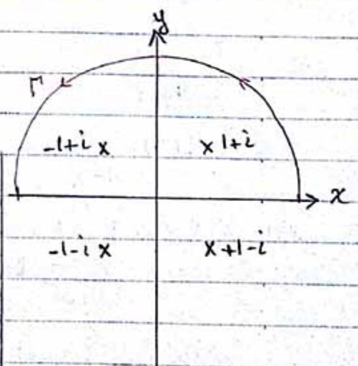
ومنه فإن:

$$I_2 = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{12i} \right) = \frac{\pi}{6} \quad *$$

$* \boxed{3} \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4}$

الحل: نضع:

$$f(z) = \frac{1}{z^4+4}$$



$z^4 + 4 = 0 \Rightarrow z^4 = -4$

أو:

$z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i) = 0$

$\Rightarrow z^2 + 2i = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} (1+i) \\ (-1-i) \end{cases}$ جذورها

$\sqrt{2i} = 1+i$ للحفظ:

وكذلك: $z^2 - 2i = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} -1+i \\ +1-i \end{cases}$ جذورها

$\sqrt{-2i} = i\sqrt{2i}$

لنحسب الرواسب عند الأقطاب التي ضمن المحيط وهي ($1+i$ ، $-1+i$).

$$Res(f(z),1+i)=\lim_{\substack{z\to 1+i \\ \text{بعد الاختصارات}}}\left(\frac{1}{(z+1+i)(z^2-2i)}\right)=\frac{1}{(2+2i)4i}$$

$$Res(f(z),-1+i)=\lim_{z\to -1+i}\left(\frac{1}{(z-1+i)(z^2-2i)}\right)=\frac{1}{-4i(-2+2i)}$$

ومنه يكون:

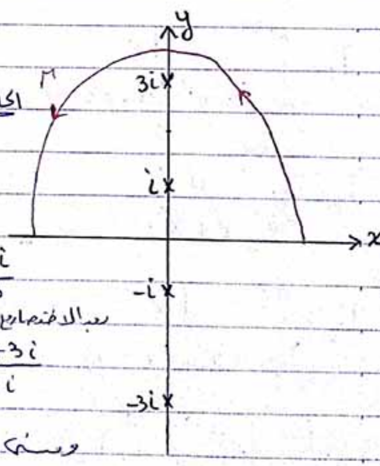
$$\Rightarrow I_3=2\pi i\left(\frac{1}{-4i(-2+2i)}+\frac{1}{4i(2+2i)}\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{8i+8}-\frac{1}{-8i+8}\right)$$

$$\underset{\text{[illegible]}}{=}2\pi i\left(\frac{1}{8i}\right)=\frac{-\pi}{4}$$ #

* $\boxed{4}$ $I_4=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$

الحل يوضح:



$$f(z)=\frac{z^2-z+2}{(z^2+9)(z^2+1)}$$

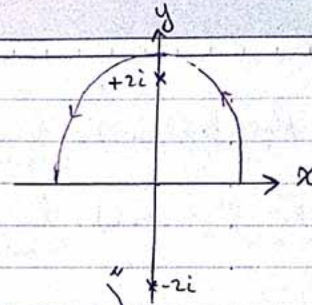
$$Res(f(z),i)=\lim_{z\to i}\frac{z^2-z+2}{\underset{\text{بعد الاختصار }(z-i)\text{ لها}}{(z^2+9)(z+i)}}=\frac{1-i}{16}$$

$$Res(f(z),3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{z^2-z+2}{(z+3i)(z^2+1)}=\frac{+7+3i}{48i}$$

ومنه يكون:

$$I_4=2\pi i\left(\frac{1-i}{16}+\frac{7+3i}{48i}\right)=\frac{5\pi}{12}$$ #

* 5 $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$



الحل، نفرض

$f(z) = \frac{1}{(z-2i)^3 (z+2i)^3}$

$Res(f(z), 2i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2i} \left(\cancel{(z-2i)^3} \frac{1}{\cancel{(z-2i)^3} (z+2i)^3} \right)''$

2i قطب درجة ثالثة

بالمشتقة معنا القوة لعزيه واشتقينا عادي

$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 2i} \left(\frac{12}{(z+2i)^5} \right) = \frac{6}{1024 i}$

ومنه:

$I_5 = \frac{3\pi}{256}$ *

* وظيفة: باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية

① * $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

ملاحظات * المعادلة من الدرجة الثانية إن لم يكن لها جذور حقيقة فإن لها جذور عقدية مترافقة.

② * $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

* كل كثير حدود من الدرجة الثالثة له صفر حقيقي إجباري.

③ * $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$

* * *

انتهت المحاضرة الخامسة عشر

* المحاضرة: السادسة عشر:. الأربعاء ٣٠/٤/٢٠١٢م.

* الحالة الثانية:.

حساب التكاملات من الشكل: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ حيث $f(x)$ تابع كسري معرّف على $R - \{b_1, \ldots, b_m\}$ حيث $b_1, \ldots, b_m$ هي أصفار من المرتبة الأولى لمقام $f(x)$.

* مبرهنة جوردان الثانية:.

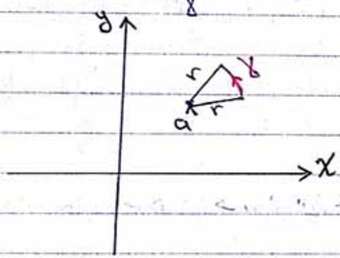
بفرض $f(z)$ تابع مستمر في جوار النقطة $a \in \mathbb{C}$ ونفرض:

$$\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = K \quad ; \quad K \in \mathbb{C}$$

ونفرض: $\gamma : \gamma(t) = re^{it} + a \quad ; t \in [t_1, t_2]$ عندئذٍ:

$$\lim_{r \to 0} \int_\gamma f(z)\,dz = i(t_2 - t_1)K$$

- الإثبات:



نضع $F(z) = (z-a)f(z) - K$

عندئذٍ:

$$f(z) = \frac{F(z)}{z-a} + \frac{K}{z-a}$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{F(z)}{z-a}dz + \int_\gamma \frac{K}{z-a}dz$$

نجعل $r \to 0$ فنجد:

$$\lim_{r \to 0}\int_\gamma f(z)dz = \lim_{r \to 0}\int_{t_1}^{t_2} \frac{re^{it}F(re^{it}+a) - K}{re^{it}} \cdot ire^{it}dt + \lim_{r \to 0}\int_{t_1}^{t_2} \frac{K}{re^{it}} \cdot ire^{it}dt$$

طبقنا القانون المباشر في الحساب $= 0 + i(t_2 - t_1) \cdot K$ $\quad r \to 0,\ z \to a$

ومنه يكون:

$$\lim_{r \to 0}\int_\gamma f(z)\,dz = i(t_2 - t_1)K$$

* مبرهنة:.

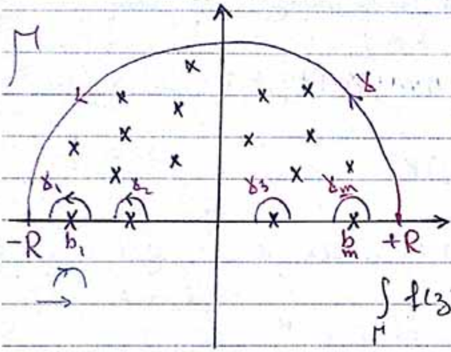
بفرض $f(z)$ تابع تحليلي في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد منتهٍ من الأقطاب $a_1, \ldots, a_n$ واقعة تماماً فوق المحور الحقيقي و $b_1, \ldots, b_m$،

أقطاب بسيطة واقعة على المحور الحقيقي، ونفرض: $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$

عندئذٍ:

الحل $$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k) + \pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f(z),b_k)$$

- الإثبات:



نضع Γ منحني بسيط مغلق كما هو موضح في الشكل، حيث:

$\gamma: \gamma(t) = Re^{it}\ ;\ t\in[0,\pi]$ نصف الدائرة

$\gamma_k: \gamma_k(t) = re^{it} + b_k\ ;\ t\in[0,\pi]\ ,\ k=1,\dots,m$

نلاحظ أنّ:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \dots - \int_{\gamma_k} f(z)\,dz + \dots$$

لأنه في الشكل عكس الاتجاه. تبع القطعة المستقيمة للمحور

حسب مبرهنة جوردان الأولى والثانية وحسب نظرية الرواسب نجد:

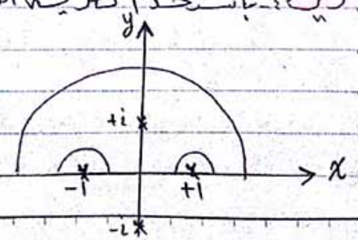
$$2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k) = 0 - \pi i\sum_{k=1}^{m} Res(f(z),b_k) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k) + \pi i\sum_{k=1}^{m} Res(f(z),b_k)\ \#$$

* تمرين: باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية:

* [1] $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-1}$

الحل: نضع:



$$f(z)=\frac{1}{z^4-1}$$

نلاحظ أن لـ $f(z)$ قطبان بسيطان على المحور الحقيقي هما $\{-1, +1\}$ وقطب في النصف العلوي من المستوي العقدي $\{i\}$ ، كذلك $\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$
ومنه يكون حسب المبرهنة السابقة :

$$I_1 = 2\pi i \, Res(f(z), i) + \pi i \, [Res(f(z), 1) + Res(f(z), -1)]$$

لنحسب الرواسب :

$$* Res(f(z), i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z+i)(z^2-1)} \to (z-i) \text{ بعد الاختصار مع}$$

$$= \frac{1}{(2i)(-2)} = \frac{1}{-4i}$$

$$* Res(f(z), 1) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z^2+i)(z+1)} = \frac{1}{4}$$

$$* Res(f(z), -1) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(z^2+i)(z-1)} = -\frac{1}{4}$$

ومنه يكون :

$$I_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{-4i}\right) + \pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

← أي يوجد مساحة زيادة تحت المحور بمقدار $\frac{\pi}{2}$

تذكرة إجباري الجواب لازم يكون عدد حقيقي

$$* \boxed{2} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^4-1} \, dx$$

نفس رسم التمرين السابق (نفس الأقطاب) الحل : نضع :

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^4-1}$$

لنحسب الرواسب :

$$Res(f(z), i) = \frac{2i+1}{-4i}$$

← بينتج مباشرة بالاستعانة بالتمرين السابق

$$Res(f(z), 1) = \frac{3}{4}$$

$$Res(f(z), -1) = \frac{1}{4}$$

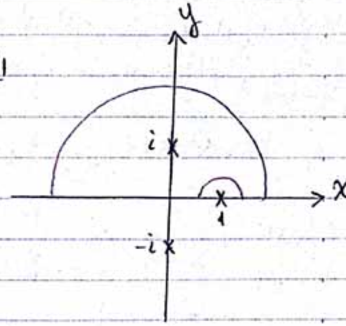
$$\Rightarrow I_2 = 2\pi i \left(\frac{2i+1}{-4i}\right) + \pi i \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

← طلع نفس الجواب ولا علاقة للطريقة للسلوك هنا نهائياً تتعلق بالتابع فردي أم زوجي (حسب تحليل 2).

* $\boxed{3}$ $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$

الحل: نضع:

$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$



نحسب الرواسب عند 1 و i :

$Res(f(z), i) = \lim_{z \to i} \frac{z}{(z-1)(z+i)}$

$\frac{i}{(i-1)(2i)} = \frac{i}{-2-2i} = \frac{i}{2(-1-i)}$

نضرب بالمرافق $(-1+i) \times -1-i$ $= \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} i$

$\frac{i(-1+i)}{2(-1-i)(-1+i)} = \frac{-i-1}{4}$

$Res(f(z), 1) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}$

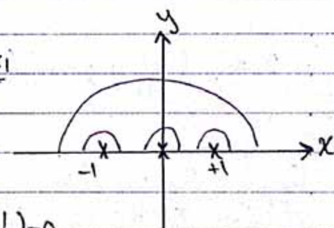
ومنه يكون:

$I_3 = 2\pi i\left(\frac{-1}{4} - \frac{1}{4} i\right) + \pi i\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ *

* $\boxed{4}$ $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - x = x(x^2-1)}$

الحل: نضع:

$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+1)}$



$$\left.\begin{aligned} Res(f(z), 0) &= -1 \\ Res(f(z), 1) &= \frac{1}{2} \\ Res(f(z), -1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_4 = \pi i\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

من البداية نستطيع أن نعرف أن التكامل ما صفر لأن التابع فردي.

** وظيفة :

* $\boxed{1}$ $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

* $\boxed{2}$ $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1 \to (x+1)(x^2 \quad)}$ متطابقة

* $\boxed{3}$ $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6 - 1 \to dx = t}$ يمكن أن نغير المتحول

* $\boxed{4}$ $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)^2} \to$ فردي لازم يطلع $= 0$

انتهت المحاضرة السادسة عشر

* المحاضرة السابعة عشر: الأربعاء: ١٧/٥/٢٠١٦.

* الحالة الثالثة:

حساب التكاملات من الشكل:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos mx\, f(x)\,dx$$

$$; m\in\mathbb{R}^*$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin mx\, f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ تابع كسري معرّف على $R-\{b_1,\dots,b_N\}$ و $b_1,\dots,b_N$ أصفار من المرتبة الأولى لـ $f(x)$.

* مبرهنة:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد منتهٍ من الأقطاب $a_1,\dots,a_n$ واقعة تماماً فوق المحور الحقيقي و $b_1,\dots,b_m$ أقطاب بسيطة واقعة على المحور الحقيقي وبفرض: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ عندئذٍ:

$e^{imz}=\cos mz+i\sin mz$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos mx\, f(x)\,dx=\underset{\text{Real}}{Re}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(e^{imz}\cdot f(z),a_k)+\pi i\sum_{k=1}^{N}Res(e^{imz}f(z),b_k)\right]$$

"الحل"

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin mx\, f(x)\,dx=\underset{\text{Imag}}{Im}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(e^{imz}\cdot f(z),a_k)+\pi i\sum_{k=1}^{N}Res(e^{imz}f(z),b_k)\right]$$

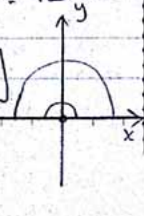
* تمرين: باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية:

$$[1]\quad I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad , \quad I'=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$$

الحل: نضع $f(z)=\dfrac{1}{z}$

نلاحظ أنه للتابع $f(z)$ قطب بسيط $a=0$ وليس له أقطاب في النصف العلوي من المستوي العقدي كذلك $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ ومنه يكون حسب القانون الثاني (تبع الـ $\sin$):

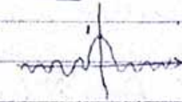
$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=Im\left[\pi i\, Res(e^{iz}f(z),0)\right]$$



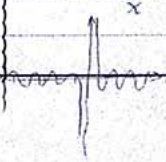
تذكرة:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & , x\in\mathbb{R}^*\\ 1 & ; x=0\end{cases}$$

في الحقيقة



$$f(x)=\frac{\cos x}{x}=$$



* $\text{Res}(e^{iz} \cdot f(z), 0) = \lim\limits_{z \to 0} e^{iz} = 1$

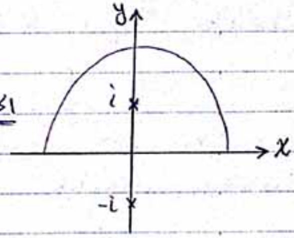
ومنه يكون:

$I_1 = \text{Im}(\pi i(1)) = \pi \to$ (أمثال: القسم التخيلي فقط)

أمثال: $I_1' = 0$ (لأنه لا يوجد قسم حقيقي)

* [2] $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx$

الحل: نضع: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$



$\text{Res}(e^{i2z} f(z), i) = \lim\limits_{z \to i} \frac{e^{i2z}}{z+i} = \frac{e^{-2}}{2i} = \frac{1}{2ie^2}$

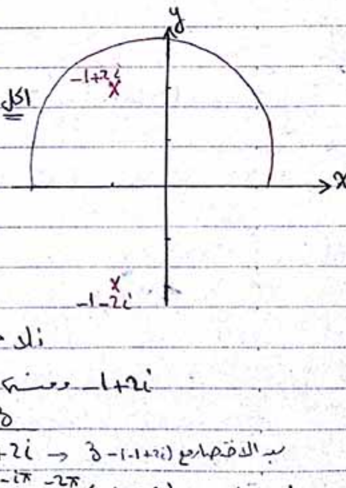
ومنه يكون:

$I_2 = \text{Re}\left(2\pi i \frac{1}{2ie^2}\right) = \frac{\pi}{e^2}$

* [3] $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5}$

الحل: نضع:

$f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}$



نحسب Δ:

$\Delta = b^2 - 4ac = -16 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$

$z_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$

$z_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$

نلاحظ أن للتابع $f(z)$ قطب بسيط فوق المحور الحقيقي وهو $-1+2i$ ومنه:

$\text{Res}(e^{i\pi z} \cdot f(z), -1+2i) = \lim\limits_{z \to -1+2i} \frac{e^{i\pi z} \cdot z}{z+1+2i}$ بالاختصار مع $\to z-(-1+2i)$

$= \frac{e^{i\pi(-1+2i)} \cdot (-1+2i)}{4i} = \frac{e^{-i\pi} \cdot e^{-2\pi}(-1+2i)}{4i} = \frac{+1-2i}{e^{2\pi} \cdot 4i}$

$\boxed{e^{i\pi} = 1 \quad e^{-i\pi} = -1}$

وعنده مثال :

$$\Rightarrow I_3 = Im\left(2\pi i\left(\frac{1-2i}{e^{2\pi}\cdot 4i}\right)\right) = \frac{-\pi}{e^{2\pi}}$$

* $\boxed{4}$ $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}\, dx$

الحل: نضع : $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)^2}$

لنحسب الرواسب :

$$Res(e^{iz}f(z), 0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = 1$$

$$Res(e^{iz}f(z), i) = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i} \frac{ie^{iz}(z-i)^2-(3z^2+4iz-1)e^{iz}}{z^2(z+i)^4}$$

قطب مضاعف (نشتق).

مشتق المقام $= z^2+2z-1$

$$= \frac{1}{e^{-1}e}\left[\frac{i\cdot i(2i)^2-(-3-4-1)}{i^2(2i)^4}\right] = \frac{-3}{4e}$$

e^{-1} عامل مشترك من البسط

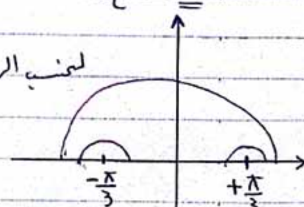
$= \frac{4+8}{-16}\cdot\frac{1}{e}$

$$I_4 = Im\left(2\pi i\left(\frac{-3}{4e}\right) + \pi i(1)\right) = \frac{-3\pi}{2e} + \pi$$

* $\boxed{5}$ $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-\frac{\pi^2}{9}}$

الحل: نضع : $f(z) = \frac{1}{z^2-(\frac{\pi}{3})^2}$

لنحسب الرواسب :



$$*Res\left(e^{iz}f(z), \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{3}} \frac{e^{iz}}{z+\frac{\pi}{3}} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{4\pi}$$

$$*Res\left(e^{iz}f(z), \frac{-\pi}{3}\right) = \lim_{z\to\frac{-\pi}{3}} \frac{e^{iz}}{z-\frac{\pi}{3}} = \frac{-3+3\sqrt{3}i}{4\pi}$$

$$\Rightarrow I_5 = Re\left[\pi i\left(\frac{3+3\sqrt{3}i}{4\pi} + \frac{-3+3\sqrt{3}i}{4\pi}\right)\right] = Re\left(\pi i\left(\frac{3\sqrt{3}i}{2\pi}\right)\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \#$$

** وظيفة : احسب التكاملات الحقيقية التالية:-

* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x+1)\sin 2x}{x^2+1}\, dx$

* $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\, dx$

* $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^2+1)}\, dx$

* * *

انتهت المحاضرة السابعة عشر

* المحاضرة الثامنة عشر: الثلاثاء: ١٣/ ٥/ ٢٠١٢م.

* الحالة الرابعة:

حساب التكاملات من الشكل: $I=\int_0^{2\pi} f(\cos x,\sin x)\,dx$

* مبرهنة: ← هذا يعني أنه يوجد في التابع $\cos x, \sin x$ ولكن لا يوجد x.

بفرض: $f(\cos x,\sin x)$ تابع كسري بالنسبة لـ $\sin x$ ، $\cos x$،

وبفرض $f(z)$ التابع العقدي الذي نحصل عليه بتعويض $z=e^{ix}$ ، وبفرض:

$a_1, \dots, a_n$ أقطاب التابع $f(z)$ الواقعة داخل منحني الدائرة:

$$\gamma : \gamma(x)=e^{ix} \quad ; \quad x\in[0,2\pi]$$

عندئذٍ:

للحفظ
$$\boxed{I=\int_0^{2\pi} f(\cos x,\sin x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k)}$$

الإثبات: من أجل $z\in\gamma$ نضع: $z=e^{ix}$ حيث $x\in[0,2\pi]$ يكون:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}\,\frac{\times(z)}{\times(z)}=\frac{z^2+1}{2z}$$

← للتخلص من z^{-1}.

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$z=e^{ix}\Rightarrow dz=ie^{ix}\,dx\Rightarrow dx=\frac{dz}{iz}$$

للحفظ:

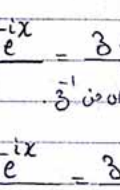
$$\cos x=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin x=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$dx=\frac{dz}{iz}$$

ومنه حسب نظرية الرواسب يكون:

$$I=\int_0^{2\pi} f(\cos x,\sin x)\,dx=\int_\gamma f(z)\,dz$$



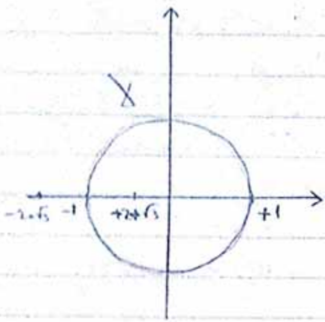
$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f(z),a_k)$$

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$$
$$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$$

* تمرين: باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية:

[1]* $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$

الحل: نضع: $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$



$dx = \frac{dz}{iz}$, $\gamma : |z| = 1$ ← دائرة الواحدة

ومنه:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z^2+1}{2z}}$$

$$= \int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2+4z+1}{2z}} = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

نلاحظ أنّ:

$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$$z^2+4z+1 = (z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})$$

لنحسب الراسب:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right) = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ومنه يكون:

$$I_1 = \left(\frac{2}{i}\right) \cdot 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \rightarrow$$ يجب أن يكون حقيقي

[2]* $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$

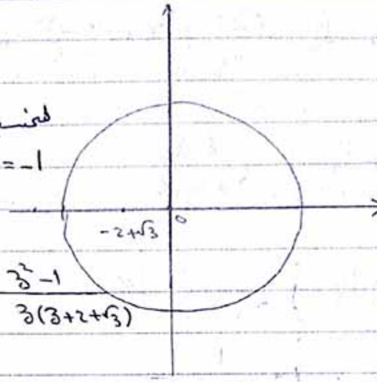
الحل:

$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}$, $dx = \frac{dz}{iz}$, $\gamma : |z| = 1$

ومنه:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \int_\gamma \frac{\frac{z^2-1}{2iz}\cdot\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z^2+1}{2z}}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int \frac{z^2-1}{z(z^2+4z-1)}\,dz$$



لنحسب الرواسب :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+4z+1)},0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2-1}{z^2+4z+1}=-1$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+4z+1)},-2+\sqrt{3}\right)=\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\frac{z^2-1}{z(z+2+\sqrt{3})}$$

$$=1$$

ومنه يكون :

$$I_2 = 2\pi i(-1+1)=0$$

$\boxed{3}$ $\ast$ $I_3=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2x}{5-4\cos x}\,dx$

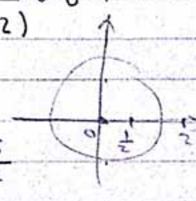
اولاً : نضع :

$$\cos x=\frac{z^2+1}{2z}\quad,\ \cos 2x=\frac{z^4+1}{2z^2}\quad,\ \gamma:|z|=1$$

ومنه :

$$I_3=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2x}{5-4\cos x}\,dx=\int_\gamma\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5-4\,\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{-1}{2i}\int_\gamma\frac{z^4+1}{z^2(2z^2-5z+2)}\,dz$$

$$=\frac{-1}{4i}\int_\gamma\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)}\,dz$$



$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)},\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^4+1}{z^2(z-2)}=\frac{-17}{6}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)},0\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4+1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}\right)'=\frac{5}{2}$$

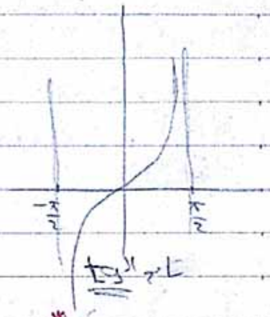
$$\Rightarrow \quad I_3 = \left(\frac{-1}{4i}\right) \cdot 2\pi i \left(\frac{-17}{6} + \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

* وظيفة: احسب التكاملات الحقيقية التالية:

[1] * $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$

[2] * $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2+\cos x} dx$

[3] * $I_3 = \int_0^{2\pi} (tg\,x + 1)\, dx \rightarrow$ لدوره 2π



انتهت المحاضرة الثامنة عشر.

* المحاضرة التاسعة عشر والأخيرة.   الأربعاء: ١٤/ ٥/ ٢٠١٤م

* الحالة الخاصة:

حساب التكاملات من الشكل:

$$I=\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ تابع كسري معرّف على $]0,+\infty[$ و p عدد كسري يحقق $0<p<1$. $\frac{\alpha}{\beta}$ $\alpha<\beta$; $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^+$

* مبرهنة:

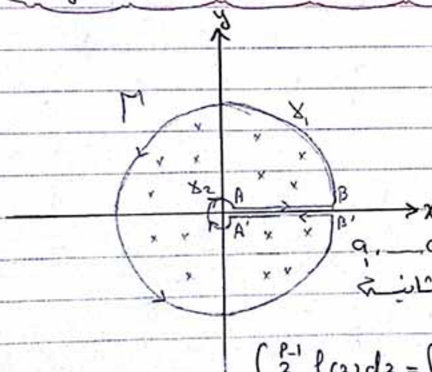
بفرض $f(z)$ تابع تحليلي باستثناء عدد منتهي من الأقطاب $a_1,\dots,a_n$ غير واقعة في الجزء الموجب من المحور الحقيقي وبفرض:

$$\lim_{z\to 0} z^{p} f(z)=0 \qquad \lim_{z\to\infty} z^{p} f(z)=0$$

عندئذٍ:

$$\boxed{I=\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)\,dx=\frac{-\pi e^{-ip\pi}}{\sin p\pi}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(z^{p-1}f(z),a_k\right)}$$ للحفظ

الإثبات:



نضع $\Gamma=[AB]+\gamma_1+[B'A']-\gamma_2$

منحني بسيط مغلق حيث:

$\gamma_1:\ \gamma_1(t)=Re^{it}\ ;\ t\in\,]0,2\pi[$

$\gamma_2:\ \gamma_2(t)=re^{it}\ ;\ t\in\,]0,2\pi[$

و R كبيرة كفاية بحيث Γ يحوي $a_1,\dots,a_n$

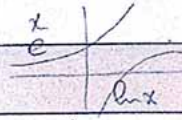
فيكون حسب مبرهنة جوردان الأولى والثانية ونظرية الرواسب:

$$\int_{\Gamma} z^{p-1} f(z)\,dz=\int_{[AB]}+\int_{\gamma_1}+\int_{\substack{[A'B']\\ [B'A']}}-\int_{\gamma_2}\left(z^{p-1}f(z)\right)dz$$

نجعل $R\to\infty$, $r\to 0$ فيكون:

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(z^{p-1}f(z),a_k\right)=\int_0^{\infty}x^{p-1}f(x)\,dx+0+\int_{\infty}^{0}\left(xe^{2\pi i}\right)^{p-1}f\left(xe^{2\pi i}\right)d\left(xe^{2\pi i}\right)-0$$

* القيمة الرئيسية للجزء الحقيقي ... تمرين

$\int^{+1} x \ln x \, dx$  $y^3 = x$

لـ نعرف $\ln(-1) = \ln 1 + ...$

$$= (1 - e^{2\pi p i}) \int_0^\infty x^{p-1} f(x)\, dx$$ → طرفا التكامل الحاصل مشترك

ومنه:

$$I = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi p i}} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z^{p-1} f(z), a_k) = \cancel{-\pi e^{-ip\pi}}$$

$$= \frac{-\pi e^{-ip\pi}}{\sin p\pi} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z^{p-1} f(z), a_k)$$ $\sin p\pi = \frac{e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}}{2i}$

* تمرين: باستخدام نظرية الرواسب احسب التكاملات الحقيقية التالية:

* [1] $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x+1}\, dx$

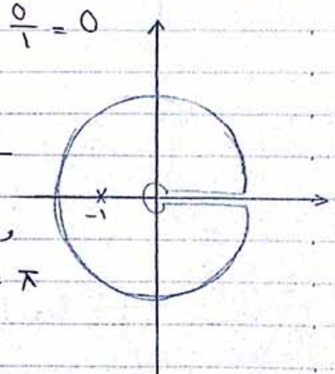
الحل:

نضع: $f(z) = \frac{1}{z+1}$; $P - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

نلاحظ أن:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z+1} = 0 \quad , \quad \lim_{z \to 0} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z+1} = \frac{0}{1} = 0$$

لـ درجة البسط < درجة المقام



$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z+1}, -1\right) = \lim_{z \to -1} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$$

ومنه يكون:

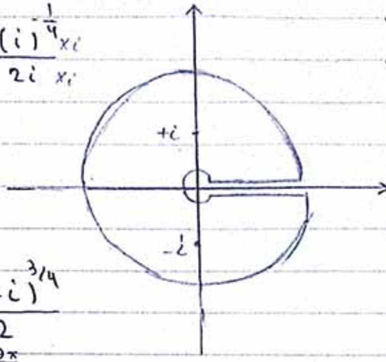
$$I_1 = \frac{-\pi e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{\sin \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i}\right) = \frac{-\pi(-i)}{1} \left(\frac{1}{i}\right) = \pi$$

$e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -i$

* [2] $I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x^2+1)} = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{x^2+1}\, dx$

نضع: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$; $P - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{3}{4}$

ملاحظات :- $\lim_{z\to 0} \frac{z^{3/4}}{z^2+1} = 0$, $\lim_{z\to\infty} z\frac{z^{3/4}}{z^2+1} = 0$



$$* \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z^2+1}, i\right) = \lim_{z\to i} \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z+i} = \frac{(i)^{-\frac{1}{4}}\times i}{2i\times i}$$

$$= \frac{-\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{-e^{i\frac{3\pi}{8}}}{2}$$

$$* \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z^2+1}, -i\right) = \lim_{z\to -i} \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{z-i}$$

$$= \frac{(-i)^{-\frac{1}{4}}\times(-i)}{-2i\times(-i)} = \frac{-(-i)^{3/4}}{2}$$

$$= \frac{-\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right)^{3/4}}{2} = \frac{-e^{i\frac{9\pi}{8}}}{2}$$

ومنه يكون :-

$$I_2 = \frac{-\pi e^{-i\frac{3}{4}\pi}}{\sin\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{-e^{i\frac{3\pi}{8}}}{2} - \frac{e^{i\frac{9\pi}{8}}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\left(e^{-\frac{3\pi}{8}i} + e^{\frac{3\pi}{8}i}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\pi\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

* وظيفة :-

احسب التكامل التالي :-

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+2)^2}$$

* انتهت المحاضرة التاسعة عشر والأخيرة *

هامين مبرهنات نظرية الرواسب (مبرهنتين).

* كل عام وانتم بخير

د. [illegible]