المحاضرة الأولى ..

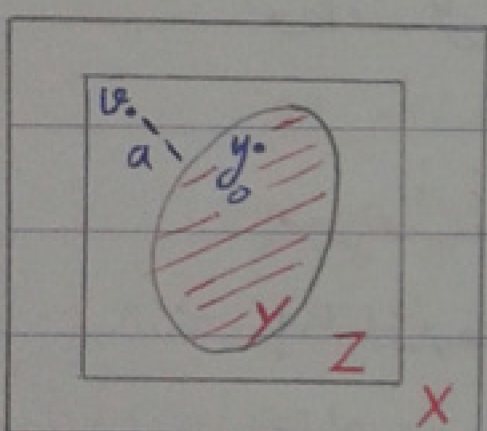
2015/3/10

تمهيدية ف. ريس :

لتكن Z , Y فضاءين جزئيين من فضاء منظم X (أياً كان بعده) ولنفرض أنّ Y مغلق ومحتوى تماماً في Z . عندئذٍ يوجد لكل عدد حقيقي θ من الفترة $(0,1)$ عنصر z من Z بحيث أنّ :

$$\|z\|=1 \quad \text{و} \quad \|z-y\|\geq\theta \quad \text{لكل } y\in Y$$

البرهان:



بما أنّ Y محتوى تماماً في Z فإنّه توجد عناصر من Z لا تنتمي لـ Y ، لتكن $v\in Z-Y$ ولنرمز لبعد v عن Y بالعدد a أي أنّ :

$$a=\inf_{y\in Y}\|v-y\|$$

من الواضح أنّ $a>0$ لكون Y مغلق ، لنأخذ الآن أي θ من الفترة $(0,1)$ عندئذٍ نجد حسب تعريف الحد الأدنى أنه يوجد y_0 من Y بحيث أنّ :

$$a\leq\|v-y_0\|\leq\frac{a}{\theta}$$

الشرط الأول للـ inf   الشرط الثاني للـ inf

تعريف inf : ① هو حد أدنى ② هو أكبر الحدود الدنيا

إنّ $a<\frac{a}{\theta}$ وذلك لأن $0<\theta<1$ ، لنفرض أنّ $z=c(v-y_0)$ حيث $c=\frac{1}{\|v-y_0\|}$

عندئذٍ يكون :

$$\|z\|=\|c(v-y_0)\|=\frac{\|v-y_0\|}{\|v-y_0\|}=1$$

سنبين الآن أن $\|z-y\| \geq \theta$ وذلك أياً كان y من Y :

$$\|z-y\| = \|c(v-y_0)-y\| = \|cv - cy_0 - y\|$$
$$= c\|v - y_0 - c^{-1}y\|$$
$$= c\|v - (y_0 + c^{-1}y)\|$$
$$= c\|v - y_1\| \quad ; \; y_1 = y_0 + c^{-1}y$$

واضح أن $y_1 \in Y$ (Y فضاء شعاعي مغلق بالنسبة للجمع والضرب المعرفين عليه)

فإننا نجد أن $\|y_1 - v\| \geq a$ (لأن a هو inf المسافات) ومنه:

$$\|z-y\| = c\|v-y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v-y_0\|} \geq \frac{a}{a/\theta} = \theta$$

وبما أن y عنصر اختياري من Y فإنه يكون قد تم البرهان.

مبرهنة (البعد المنتهي):

إذا اتصف فضاء منظم X بأن الكرة الواحدية المغلقة $M = \{x \in X ; \|x\| \leq 1\}$ متراصة فيه فإن X منتهي البعد.

البرهان:

لنفرض أن M متراصة ولنبرهن أن الفضاء المنظم X منتهي البعد، من أجل ذلك نفرض مؤقتاً أن $\dim X = \infty$.

لنأخذ $x_1 \in X$ بحيث $\|x_1\| = 1$، إن x_1 يولد فضاء جزئي X_1 من X وبعده يساوي 1.

بما أن X_1 منتهي البعد يكون مغلق حسب المبرهنة: «كل فضاء منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون مغلق» وهو محتوى تماماً في X لأن $\dim X_1 = 1 < \dim X = \infty$ وبالتالي استناداً إلى تمهيدية ريس فإنه

من أجل كل θ من الفترة $(0,1)$ ولنأخذ $\theta = \frac{1}{2}$ يوجد عنصر x_2 من X بحيث $\|x_2\| = 1$ ويحقق $\|x_2 - x_1\| \geqslant \theta = \frac{1}{2}$

إنّ العنصرين x_1 و x_2 يولدان فضاء جزئي X_2 من X بحيث $\dim X_2 = 2$ وهو مغلق ومحتوى تماماً في X لأنّ $\dim X = \infty$ $\dim X_2 = 2 < \dim X = \infty$ وبالتالي حسب توطيدية ريس فإنه يوجد عنصر x_3 من X من أجل كل θ من الفترة $(0,1)$ بحيث $\|x_3\| = 1$ ويحقق $\|x_3 - x\| \geqslant \theta = \frac{1}{2}$ من أجل كل $x \in X_2$

وبوجه خاص $\|x_3 - x_2\| \geqslant \frac{1}{2}$ ، $\|x_3 - x_1\| \geqslant \frac{1}{2}$

وإذا تابعنا هذا بالشرح نجد أنّ المتتالية (x_n) من عناصر M لأنّ $\|x_n\| = 1$ وتحقق أيضاً $(m \neq n)$ $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ وبالتالي المتتالية (x_n) ليست كوشية أي لا يمكن أن تكون متتالية جزئية متقاربة وهذا يناقض كون M متراصة ، لذا فإنّ افتراضنا بأنّ $\dim X = \infty$ خاطئ وبالتالي يكون $\dim X < \infty$.

انتهت المحاضرة ..