لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*) \quad , \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0$$

والشروط الحدية هي:

$$u(t,0) = \alpha(t)$$

$$u(t,l) = \beta(t)$$

$$u(0,x) = f(x)$$

سوف نقدم الآن الطريقة الظاهرية والطريقة التراجعية وطريقة الفروق لإيجاد معادلة.

أولاً: الطريقة الظاهرية: وهي احدى طرق الفروق المنتهية وسوف نستخدم في هذه الطريقة طريقة الفروق التقدمية بالنسبة للزمن وطريقة الفروق المركزية بالنسبة للمسافة.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} + \underbrace{\left(-\frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \tau_j)\right)}_{O(k)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12} u_{xxxx}(\tau_i, t_j)}_{O(h^2)}$$

خطأ الاقتطاع $\leftarrow \tau_{ij} = O(k) + O(h^2) \xrightarrow[k,h \to 0]{} 0$

الآن نعوض في المعادلة (*) فيصبح لدينا:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \tau_{ij}$$

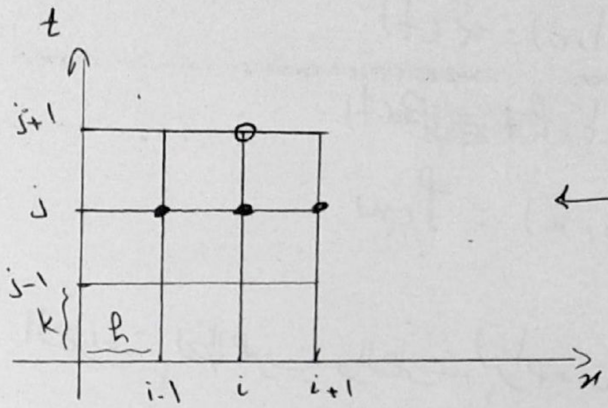
ومنه نجد:

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right) \qquad \boxed{\lambda = \frac{k}{h^2}}$$

ومنه بعد الإصلاح نجد أن.

$$\boxed{u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j}}$$

وهي معادلة الفروق المطلوبة.



stencil مخطط

- إيجاد شرط الاستقرار حسب تحليل فورييه لاستقرار:

نفترض أن شكل الحل سيكون هو الشكل الأسي أي:

$$\boxed{u_{ij} = w_j e^{v x_i I}} \quad \boxed{**} \quad ; \quad I = \sqrt{-1}$$

نعوض $\boxed{**}$ في معادلة الفروق السابقة نجد أن:

$$w_{j+1} e^{v x_i I} = \lambda w_j e^{v x_{i+1} I} + (1-2\lambda) w_j e^{v x_i I} + \lambda w_j e^{v x_{i-1} I}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ x_{i-1} &= x_i - h \end{aligned}}$$

$$= \lambda w_j e^{v(x_i+h)I} + (1-2\lambda) w_j e^{v x_i I} + \lambda w_j e^{v(x_i-h)I}$$

$$= \lambda w_j e^{v x_i I} e^{v h I} + (1-2\lambda) w_j e^{v x_i I} + \lambda w_j e^{v x_i I} e^{-v h I}$$

بقسمة الطرفين على $e^{v x_i I}$ نجد:

$$w_{j+1} = [\lambda e^{v h I} + (1-2\lambda) + \lambda e^{-v h I}] w_j \qquad \boxed{vh = \theta}$$

$$= [\lambda (e^{\theta I} + e^{-\theta I}) + (1-2\lambda)] w_j$$

$$= [2\lambda \cos\theta + 1 - 2\lambda] w_j$$

$$= [-2\lambda(1-\cos\theta) + 1] w_j$$

$$w_{j+1} = [-4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} + 1]\, w_j$$

$$\Rightarrow \frac{w_{j+1}}{w_j} = -4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} + 1$$

$$G = 1 - 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}$$

* عندما $u_{j+p,m} = \lambda^p e^{i x_m r}$ تكون المتتالية λ^p متقاربة إذا كانت $|\lambda| \le 1$ وبالتالي هو شرط تحليل فورييه.

إذن مما سبق نجد أنه يجب أن يكون: $|G| \le 1$ أي:

$$\left|1 - 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le 1 - 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} \le 1$$

$$\Rightarrow -2 \le -4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \le \frac{1}{2}}$$ وهو شرط فورييه للاستقرار

$$\lambda \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{h^2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{2}}$$ وهو الشرط الاستقراري.

<u>ثانياً</u>: الطريقة الضمنية: وهي أيضاً إحدى طرق الفروق المحدودة حيث نستخدم طريقة الفروق التراجعية بالنسبة للزمن وطريقة الفروق المركزية بالنسبة للمسافة.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \qquad \tau_{ij} = O(k) + O(h^2) \xrightarrow[k,h\to]{} 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - O(h^2)$$

بالتعويض في معادلة الحرارة $\boxed{*}$ نجد:

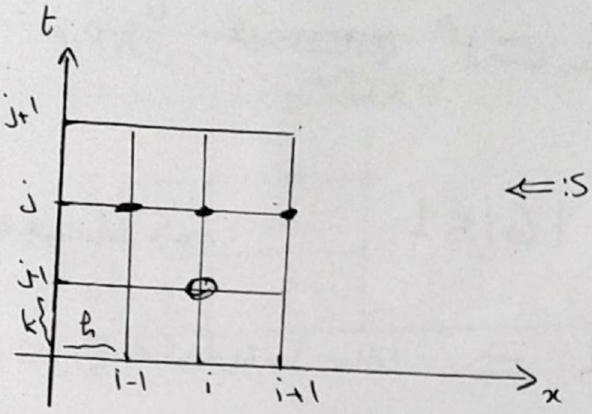
$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j} - \ldots = \frac{k}{h^2}\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]$$

$$\boxed{\lambda = \frac{k}{h^2}}$$

$$u_{i,j-1} = -\lambda u_{i+1,j} + (1+2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i-1,j}$$

وهي معادلة الفروق المطلوبة.



مخطط $\Leftarrow$: stencil

دراسة الاستقرار حسب تحليل فورييه:

نفرض الآن أن الحل u_{ij} له الشكل: $I=\sqrt{-1}$; $w_j e^{r x_i I}$ عندئذ:

$$w_{j-1} e^{r x_i I} = -\lambda w_j e^{r x_{i+1} I} + (1+2\lambda) w_j e^{r x_i I} - \lambda w_j e^{r x_{i-1} I}$$

$$= -\lambda w_j e^{r x_i I} e^{r h I} + (1+2\lambda) w_j e^{r x_i I} - \lambda w_j e^{r x_i I} e^{-r h I}$$

بتقسيم الطرفين على $e^{r x_i I}$ نجد:

$$w_{j-1} = -\lambda w_j e^{r h I} + (1+2\lambda) w_j - \lambda w_j e^{-r h I}$$

$$= \left[-\lambda e^{\theta I} + (1+2\lambda) - \lambda e^{-\theta I}\right] w_j \qquad \boxed{rh = \theta}$$

$$= \left[-2\lambda \cos\theta + 1 + 2\lambda\right] w_j$$

$$= \left[2\lambda(1-\cos\theta) + 1\right] w_j$$

$$= \left[4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} + 1\right] w_j$$

$$w_j = \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}} w_{j-1}$$

$$G = \frac{1}{1+4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

لنطبق الآن شرط تحليل فورييه لاستقرار الحلول نجد:

$$|G| = \left|\frac{1}{1+4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}}\right| \leq 1$$

كون البسط < المقام والمقادير موجبة ⇐ $|G| \leq 1$.

ومنه:

$$\left|\frac{1}{1+4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}}\right| \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0}$$

ومنه الطريقة مستقرة دوماً مهما تكن λ . أي لا يوجد شرط للاستقرار في الطريقة الضمنية .

- لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية :

$$(*) \; --- \; \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 \le x \le l , \; t \ge 0$$

γ : ثابت الانتشار الحراري .

$$\left.\begin{aligned} u(t,0) &= \alpha(t) \\ u(t,l) &= \beta(t) \\ u(0,x) &= f(x) \end{aligned}\right\} \text{الشروط الحدية}$$

- سوف نتعرف الآن على احدى طرق الفروق المنتهية الأولى :

. طريقة كرانك نيكلسون : (Crank-Nicolson Method)

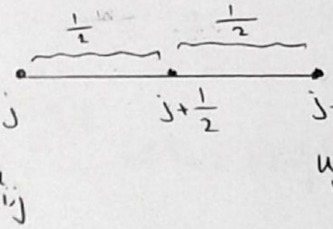
اقترح العالم كرانك نيكلسون هذه الطريقة لحساب النقطة التي احداثياتها $u_{i,j+\frac{1}{2}}$.

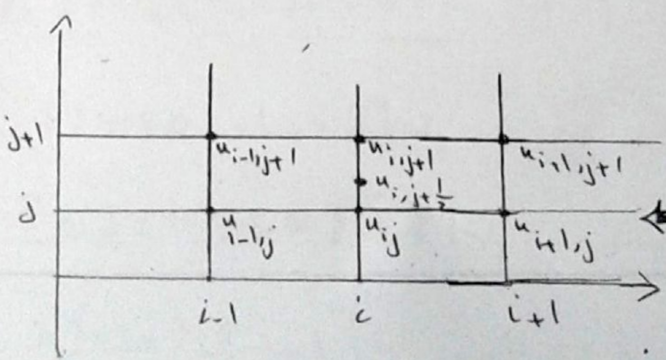
في هذه الطريقة سوف نستبدل طريقة الفروق المركزية بالنسبة للزمن وطريقة الفروق المركزية بالنسبة للمسافة وذلك في معادلة الحرارة (*) :

حيث أن :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i,j+\tfrac{1}{2}) = \frac{u(i,j+1) - u(i,j)}{2\,\frac{\Delta t}{2}} + O(k^2)$$

«الصيغة المركزية»





(stencil مخطط)

من نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(i,j+\frac{1}{2})} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{K} \quad ---- (1)$$

- أما بالنسبة للمسافة فنجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(i,j+\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}\right]}_{j,\,j+1 \text{ متوسط حسابي لـ}} + O(h^2) \quad (2)$$

* ملاحظة *:

في طريقة كرنك نيكلسون عندما طبقنا الطريقة المركزية للمسافة استخدمنا المتوسط الحسابي للعددين ألا وهما $j+1$ و j .

والآن نعوض (1) و (2) في معادلة الحرارة (*) نجد:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1.8}{2}\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}\right]$$

ومنه:

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{8.K}{2h^2}\left[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}\right]$$

$$\boxed{\lambda = \frac{8.K}{h^2}}$$

. بعد إصلاح المعادلة نجد والضرب بـ (2) نجد أن:

$$2(1+\lambda)u_{i,j+1} - \lambda u_{i+1,j+1} + \lambda u_{i-1,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + 2(1-\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j}$$

وهي معادلة الفروق المطلوبة.

$x_i + h$

$x_{i-1} = x_i - h$

دراسة الاستقرار حسب تحليل فورييه :

لنفرض أن الحل من الشكل الأسي (هذا الحل موجود في النقاط الداخلية) حيث :

$$u_{ij} = e^{r x_i I} w_j \quad ; \quad I = \sqrt{-1}$$

نعوض في معادلة الفروق السابقة * نجد :

$$(1+\lambda) w_{j+1} e^{r x_i I} - \underbrace{\lambda w_{j+1} e^{r x_i I} e^{r h I}}_{\lambda w_{j+1} e^{r x_{i+1} I}} + \lambda w_{j+1} e^{r x_i I} e^{r h I} = \lambda w_j e^{r x_i I} e^{r h I} + \lambda w_j e^{r x_i I} e^{-r h I} + 2(1-\lambda) w_j e^{r x_i I}$$

$$rh = \theta$$

بتقسيم الطرفين على $e^{r x_i I}$ نجد :

$$[2(1+\lambda) - \lambda e^{rhI} - \lambda e^{-rhI}] w_{j+1} = [\lambda e^{rhI} + \lambda e^{-rhI} + 2(1-\lambda)] w_j$$

ومنه :

$$[2 + 2\lambda - \lambda(2\cos\theta)] w_{j+1} = [2\lambda\cos\theta + 2 - 2\lambda] w_j$$

$$[2 + 2\lambda(1-\cos\theta)] w_{j+1} = [-2\lambda(1-\cos\theta) + 2] w_j$$

$$[2 + 2\lambda(2\sin^2\tfrac{\theta}{2})] w_{j+1} = [-2\lambda[2\sin^2\tfrac{\theta}{2}] + 2] w_j$$

$$[2 + 4\lambda\sin^2\tfrac{\theta}{2}] w_{j+1} = [2 - 2\lambda\sin^2\tfrac{\theta}{2}] w_j$$

$$\Longrightarrow w_{j+1} = \frac{1 - 2\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}} w_j$$

* عندما $u_{i,j+1} = \lambda^{1} e^{r x_i I}$

تكون المتتالية λ^{1} متقاربة إذا كانت $|\lambda| \leq 1$ وهو شرط تحليل فورييه للاستقرار

$$|G| \leq 1 \Longrightarrow \left| \frac{1 - 2\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}} \right| \leq 1$$

نلاحظ أن البسط أصغر من المقام $\Longleftarrow$ $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} < 1$ ومنه نجد أن $|G| \leq 1$ دوماً

محققة ، وبالتالي

$$-1-2\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} \le 1-2\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} \le 1+2\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$-1 \le 1 \le 1+4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 4\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} \ge 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0}$$

لا يوجد شرط للاستقرار ومحققة مهما تكن λ.

• إن طريقة كرانك نيكلسون أفضل من الطريقة الضمنية لأنها تعطي أكثر دقة.

$O(k^2, h^2) \longrightarrow$ كرانك نيكلسون

ثالثاً: طريقة ثيتا: هي أيضاً إحدى طرق الفروق المستوية وهي تعميم لطريقة كرانك نيكلسون.

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \left[(1-\theta)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} + (\theta)\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}\right]$$

ومنه:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \lambda(1-\theta)u_{i+1,j} - 2\lambda(1-\theta)u_{i,j} + \lambda(1-\theta)u_{i-1,j} + \lambda u_{i+1,j+1} - 2\lambda\theta u_{i,j+1} + \theta\lambda u_{i-1,j+1} \quad (*)$$

حيث $\lambda = \frac{k}{h^2}$ ، وهي معادلة الفروق المطلوبة.

في حال:

$\theta = 0$ نحصل على الطريقة الظاهرية.

$\theta = 1$ نحصل على الطريقة الضمنية.

$\theta = \frac{1}{2}$ نحصل على طريقة كرانك نيكلسون.

معادلة الفروق السابقة (*) نحصل على:

$$(1+2\lambda\theta)u_{i,j+1}-\lambda\theta u_{i+1,j+1}-\theta\lambda u_{i-1,j+1}=\lambda(1-\theta)u_{i+1,j}+(1-2\lambda(1-\theta))u_{ij}+\lambda(1-\theta)u_{i-1,j}$$

- دراسة الاستقرار حسب تحليل فورييه:

نفرض أن كل u_{ij} له الشكل $w_j e^{rx_iI}$ حيث $I=\sqrt{-1}$ عندئذ:

$$(1+2\lambda\theta)w_{j+1}e^{rx_iI}-\lambda\theta w_{j+1}e^{rx_{i+1}I}-\theta\lambda w_{j+1}e^{rx_{i-1}I}=\lambda(1-\theta)w_je^{rx_{i+1}I}+(1-2\lambda(1-\theta))w_je^{rx_iI}+$$
$$+\lambda(1-\theta)w_je^{rx_{i-1}I}$$

$$(1+2\lambda\theta)w_{j+1}e^{rx_iI}-\lambda\theta w_{j+1}e^{rx_iI}e^{rhI}-\theta\lambda w_{j+1}e^{rx_iI}e^{-rhI}=\lambda(1-\theta)w_je^{rx_iI}e^{rhI}+$$
$$+(1-2\lambda(1-\theta))w_je^{rx_iI}+\lambda(1-\theta)w_je^{rx_iI}e^{-rhI}$$

بالإصلاح وتقسيم طرفي المعادلة على e^{rx_iI} نجد:

$$[(1+2\lambda\theta)-\underbrace{\lambda\theta e^{rhI}-\theta\lambda e^{-rhI}}]w_{j+1}=[\underline{\lambda(1-\theta)e^{rhI}}+(1-2\lambda(1-\theta))+\underline{\lambda(1-\theta)e^{-rhI}}]w_j$$

$$[1+2\lambda\theta-2\lambda\theta\cos(rh)]w_{j+1}=[(1-2\lambda(1-\theta))+2\lambda(1-\theta)\cos(rh)]w_j$$

$$[1+4\lambda\theta\sin^2\frac{rh}{2}]w_{j+1}=[1-4\lambda(1-\theta)\sin^2\frac{rh}{2}]w_j$$

$$w_{j+1}=\frac{1-4\lambda(1-\theta)\sin^2\frac{rh}{2}}{1+4\lambda\theta\sin^2\frac{rh}{2}}w_j$$

$$G=\frac{1-4\lambda(1-\theta)\sin^2\frac{rh}{2}}{1+4\lambda\theta\sin^2\frac{rh}{2}}$$

لنطبق الآن شرط تحليل فورييه لاستقرار الحلول عندئذ:

$$|G|=\left|\frac{1-4(1-\theta)\lambda\sin^2\frac{rh}{2}}{1+4\lambda\theta\sin^2\frac{rh}{2}}\right|\leq 1$$

ملاحظة:

$$1-4\lambda\sin^2\frac{rh}{2}+4\theta\lambda\sin^2\frac{rh}{2}\leq 1+4\lambda\theta\sin^2\frac{rh}{2}$$

$$\Rightarrow 4\lambda\sin^2\frac{rh}{2}\geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda\geq 0}$$

$\sin^2\frac{vh}{2} + 4\lambda\theta\sin^2\frac{vh}{2} \geq -1 - 4\lambda\theta\sin^2\frac{vh}{2}$ وبجمعها أخرى:

$2 + 8\lambda\theta\sin^2\frac{vh}{2} - 4\lambda\sin^2\frac{vh}{2} \geq 0$

$1 + 4\lambda\theta\sin^2\frac{vh}{2} - 2\lambda\sin^2\frac{vh}{2} \geq 0$

$1 + 4\lambda\theta - 2\lambda \geq 0$

$1 + 2\lambda(-1 + 2\theta) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}}$

$\Rightarrow \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$

$\Rightarrow \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2(1-2\theta)}$ وهو الشرط الاستقراري

طريقة leap frog : وهي أيضاً من طرق الفروق المستوفة حيث تستخدم في هذه الطريقة

طريقة الفروق المركزية بالنسبة للمسافة وطريقة الفروق المركزية بالنسبة للزمن.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

بالتعويض في معادلة الحرارة $\boxed{*}$ نجد:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} + \frac{2k}{h^2}\left[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right] \quad ; \quad \frac{k}{h^2} = \lambda$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} + 2\lambda\left[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right]$$

وهي معادلة الفروق المطلوبة.

- دراسة الاستقرار حسب تحليل فورييه:

نفرض أن الحل u_{ij} له الشكل $w_j e^{r x_i I}$ حيث $I = \sqrt{-1}$ عندئذ:

$$w_{j+1} e^{r x_i I} = w_{j-1} e^{r x_i I} + 2\lambda\left[e^{r x_{i+1} I} - 2 + e^{r x_{i-1} I}\right] w_j$$

بعد التعويض وبتقسيم طرفي المعادلة على $e^{r x_i I}$ نجد:

$$w_{j+1} = w_{j-1} + 2\lambda\left[e^{rhI} + e^{-rhI} - 2\right] w_j$$

$$\theta = rh$$

$$w = \frac{1}{w} + 2\lambda\left[2\cos\theta - 2\right]$$

$$= \frac{1}{w} - 4\lambda\left[2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{1}{w} - 8\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$w^2 + 8\lambda w p - 1 = 0 \quad ; \quad p = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$= b^2 - 4aC = 64\lambda^2p^2 + 4 = 4(16\lambda^2p^2 + 1) \geq 0$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{16\lambda^2p^2+1}$

$\sqrt{16\lambda^2p^2+1} \leq 4\lambda p + 1$

$\boxed{|w_1| \leq 1}$

$$w_1 = \frac{-8\lambda p + 2\sqrt{16\lambda^2p^2+1}}{2} = -4\lambda p + \sqrt{16\lambda^2p^2+1} \Rightarrow |w_1| \leq 1$$

$$w_2 = -4\lambda p - \sqrt{16\lambda^2p^2+1}$$

ومنه نجد أن طريقة leap frog مستقرة من أجل w_1 وليست مستقرة من أجل w_2 فهي

مستقرة .

فهذه الطريقة ليست مستقرة من أجل جميع λ.

: The Du Fort - Frankel طريقة :

وهي إحدى طرق الفروق المتقدمة وهي تعتبر أكثر تطوراً من طريقة leap frog حيث تستخدم طريقة الفروق المركزية بالنسبة للمسافة وطريقة الفروق المركزية بالنسبة للزمن. بالإضافة إلى ذلك سوف نستخدم المتوسط الحسابي لـ :

$$u_{ij} = \frac{1}{2}[u_{i,j+1} + u_{i,j-1}]$$

لدينا :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2}[u_{i,j+1} + u_{i,j-1}]$$

بالتعويض في معادلة الحرارة* نجد :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1,j} - (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} + \frac{2k}{h^2}[u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j}]$$

$$(1+2\lambda)u_{i,j+1} = (1-2\lambda)u_{i,j-1} + 2\lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

وهي معادلة الفروق المطلوبة.

- دراسة الاستقرار حسب تحليل فورييه :

لنفرض أن الحل u_{ij} له الشكل $w_j e^{r x_i I}$ حيث $I=\sqrt{-1}$ ومنه :

$$(1+2\lambda) w_{j+1} e^{r x_i I} = (1-2\lambda) w_{j-1} e^{r x_i I} + 2\lambda\left(e^{r x_{i+1} I} + e^{r x_{i-1} I}\right) w_j$$

بعد الاصلاح والتعويض نجد : ، $rh=\theta$

$$(1+2\lambda) w_{j+1} = (1-2\lambda) w_{j-1} + 2\lambda\left(e^{rhI} + e^{-rhI}\right) w_j$$

$$(1+2\lambda) w = (1-2\lambda)\frac{1}{w} + 2\lambda(2\cos\theta)$$

$$(1+2\lambda) w^2 = (1-2\lambda) + 4\lambda w\cos\theta$$

$$(1+2\lambda) w^2 - 4\lambda\cos\theta\, w - (1-2\lambda) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4\lambda\cos\theta)^2 + 4(1+2\lambda)(1-2\lambda)$$

$$= 16\lambda^2\cos^2\theta + 4(1-4\lambda^2)$$

$$= 16\lambda^2\cos^2\theta + 4 - 16\lambda^2 = 16\lambda^2(\cos^2\theta - 1) + 4$$

$$= -16\lambda^2\sin^2\theta + 4 = 4(4\lambda^2\sin^2\theta + 1)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{4\lambda^2\sin^2\theta + 1}$$

$$w_{1,2} = \frac{\mp\sqrt{-4\lambda^2\sin^2\theta + 1} + 2\lambda\cos\theta}{(1+2\lambda)}$$

عندما يكون : $(\text{nonnegative } 1-4\lambda^2\sin^2\theta)$

$$w_1 = \frac{2\lambda\cos\theta + \sqrt{-4\lambda^2\sin^2\theta + 1}}{(1+2\lambda)}$$

عندئذ :

$$|w| \le \frac{2\lambda|\cos\theta| + \sqrt{-4\lambda^2\sin^2\theta+1}}{(1+2\lambda)} \le \frac{2\lambda+1}{1+2\lambda} = 1$$

وعندما يكون :

$$w_2 = \frac{-\sqrt{4\lambda^2\sin^2\theta + 1} + 2\lambda\cos\theta}{(1+2\lambda)}$$ (negative يكون $-4\lambda^2\sin^2\theta+1$)

$$|w_2|^2 = \frac{(2\lambda\cos\theta)^2 + 4\lambda^2\sin^2\theta - 1}{(1+2\lambda)^2}$$

$$= \frac{4\lambda^2 - 1}{4\lambda^2 + 4\lambda + 1} < 1$$

ومنه نجد أن هذه الطريقة OFF مستقرة أياً كانت قيمة λ .