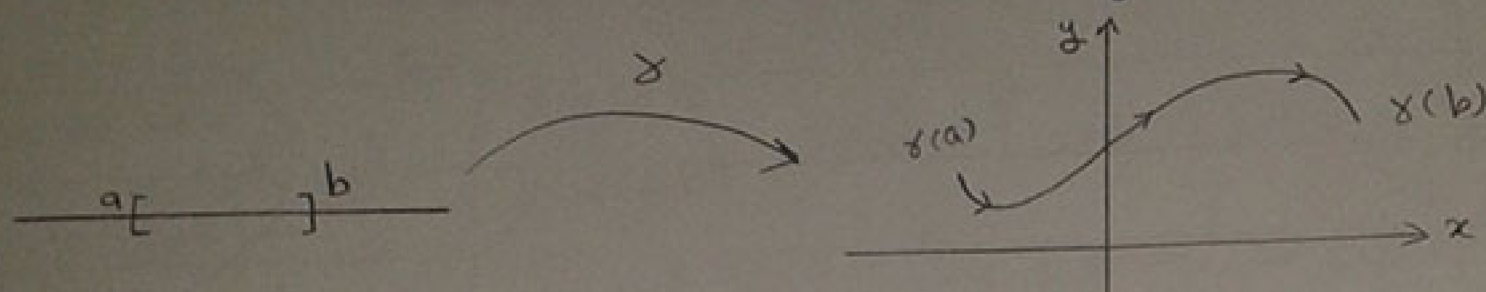
المحاضرة الأولى ١٠/ ٣/ ٢٠١٥

الفصل الأول التكاملات العقدية

• تعريف المنحني العقدي في المستوي العقدي: هو كل تابع عقدي مستمر بمتحول حقيقي من الشكل:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$



حيث نسمي t الوسيط، وبالتالي المنحني العقدي يتعين بتابعين حقيقيين هما $x(t)$ و $y(t)$

كما نرمز للمنحني العقدي بـ γ (غاما) أو C أو ...

نقول إن المنحني (γ) يمر بالنقطة z_0 من المستوي العقدي إذا وجد $t_0 \in [a,b]$ بحيث يكون

$$z_0 = \gamma(t_0) = x(t_0) + iy(t_0)$$

نسمي $\gamma(a)$ بداية المنحني γ و $\gamma(b)$ نهايته وبالتالي يمكن توجيه أي منحني عقدي وفق تزايد قيم t

نقول عن المنحني (γ) إنه مغلق إذا انطبقت بدايته على نهايته أي إذا تحقق $\gamma(a)=\gamma(b)$

نقول عن المنحني (γ) إنه بسيط إذا كان متباين أي،

$$\forall\ t_1, t_2 \in [a,b]\ ;\ \gamma(t_1)=\gamma(t_2) \Longrightarrow t_1=t_2$$

ملاحظة: يكون المنحني المغلق بسيط إذا كان متبايناً على المجال $[a,b[$

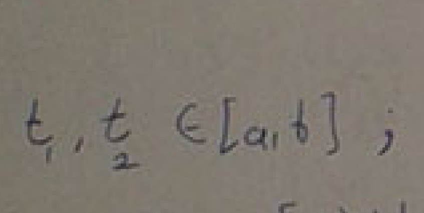
نقول عن المنحني (γ) إنه من الصف C^1 إذا كان قابل للاشتقاق على المجال $[a,b]$ ومشتقه مستمر (C^1 هو مجموعة التوابع القابلة للاشتقاق مرة واحدة).

نقول عن المنحني (γ) إنه من الصف C^1 قطعياً إذا وجدت تجزئة منتهية للمجال $[a,b]$ من الشكل

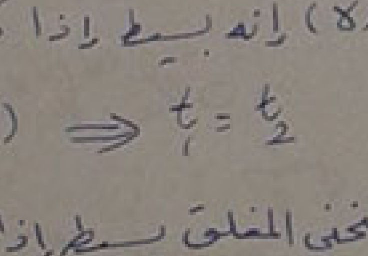
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

بحيث يكون γ من الصف C^1 على المجالات الجزئية $[t_i, t_{i+1}]$ بحيث $i=0,1,\dots,n-1$

والنهايات $\lim_{t \to t_i^{>}} \gamma(t)$ ، $\lim_{t \to t_i^{<}} \gamma'(t)$ موجودة ومحدودة.



من الصف C^1



من الصف C^1 قطعياً

نقول عن المنحني γ إنه طريق إذا كان بسيطاً ومن الصف C^1 قطعياً.

نقول عن المنحني γ إنه أملس إذا كان بسيطاً ومن الصف C^1.

تمرين: مثّل المنحنيات العقدية التالية في المستوي العقدي:

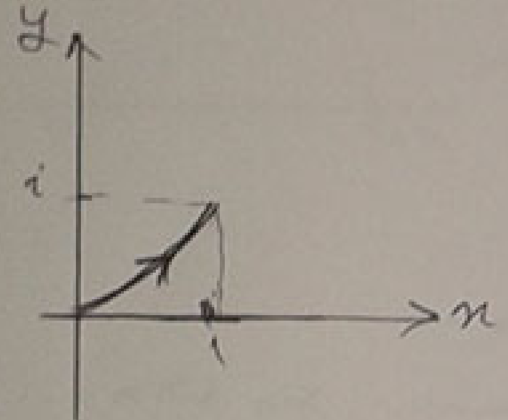
1] $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ t \mapsto \gamma(t) = t + i t^2$

عوضنا قيمة t في (2) فوجدنا $[y(t) = x^2]$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t & (1) \\ y(t) = t^2 & (2) \end{cases} ; t \in [0,1] \Longrightarrow \gamma : y = x^2 \ ; x \in [0,1]$$

لأن x أخذت نفس قيم t لأنّ $x(t) = t$

ومنه نجد أن المنحني γ هو عبارة عن فرع من قطع مكافئ الذي معادلته $y = x^2$ الموضح بالرسم



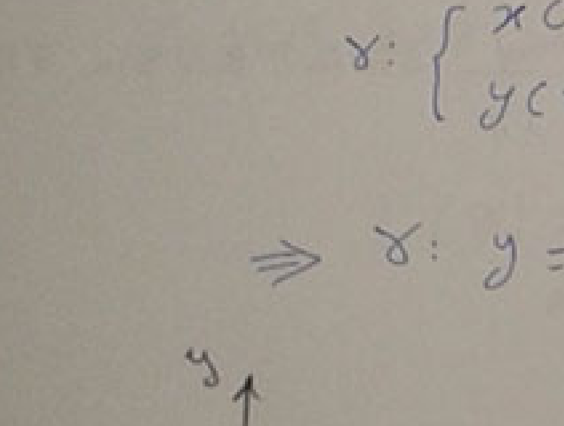
وهو منحني أملس بدايته $\gamma(0) = 0$ ونهايته $\gamma(1) = 1 + i$

(بسيط وليس مغلق من الصف C^1).

2] $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ t \mapsto \gamma(t) = t + i(t^3 - t)$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 - t \end{cases} ; t \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow \gamma : y = x^3 - x \quad ; \quad x \in [-1,1]$$

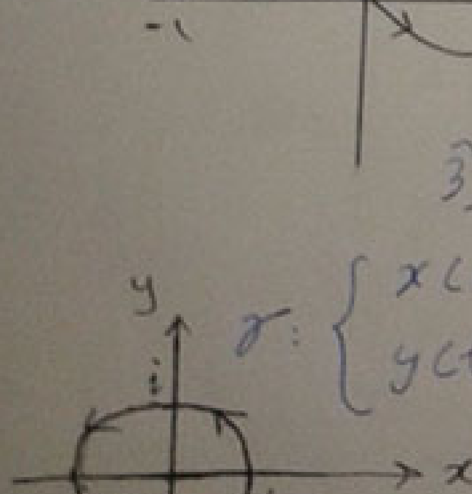


وهو المنحني الموضح بالرسم حيث بدايته $\gamma(-1) = -1$

ونهايته $\gamma(1) = 1$ (أملس).

3] $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ t \mapsto \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi] \Longrightarrow \gamma : x^2 + y^2 = 1$$

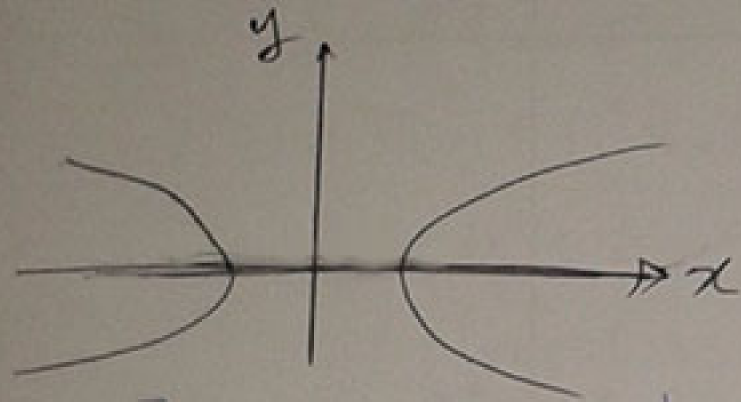


وهي تمثل دائرة الواحدة (منحني مغلق) وأملس

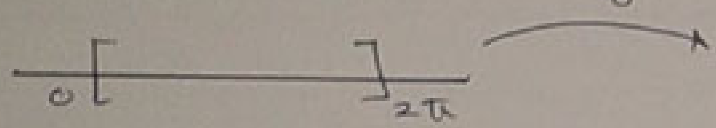
4] $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ t \mapsto \gamma(t) = ch\,t + i\,sh\,t$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = ch\,t \\ y(t) = sh\,t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma : x^2 - y^2 = ch^2 t - sh^2 t = 1$$

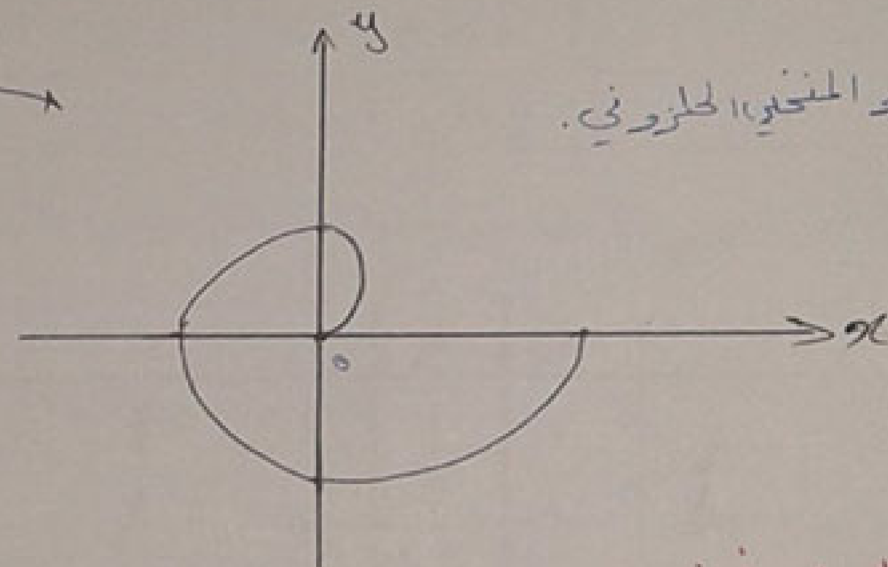
وهي معادلة قطع زائد



5] $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) = te^{it} = t\cos t + i\,t\sin t$



وهو المنحني الحلزوني.



. طول منحني عقدي:

بفرض $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ منحني أملس عندئذٍ طول المنحني γ يعطى بالقانون

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

للحفظ

تمرين ١: احسب طول المنحنيات التالية

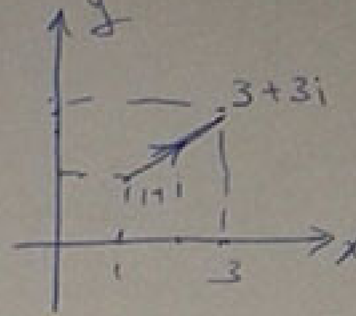
1] $\gamma : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ t \mapsto \gamma(t) = t + it$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} ; t \in [1,3] \Rightarrow \gamma : y = x \ ; \ x \in [1, 3]$$

وهي معادلة مستقيم منصف الربع الأول

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_1^3 |(t+it)'|\,dt = \int_1^3 |1+i|\,dt$$

$$L(\gamma)=\int_1^3 \sqrt{2}\,dt=\left[\sqrt{2}\,t\right]_1^3=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$



$\boxed{2}$ $\gamma:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow \mathbb{C}\,,\ t\mapsto \gamma(t)=3e^{it}+1+i$

$$\gamma(t)=3(\cos t+i\sin t)+1+i=1+3\cos t+i(3\sin t+1)$$

$$\gamma:\begin{cases} x(t)=3\cos t+1 \\ y(t)=3\sin t+1\end{cases}\ ;\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

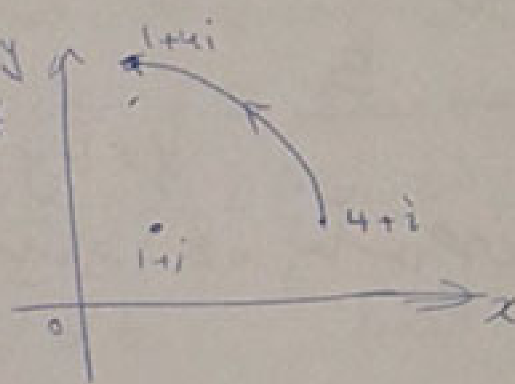
نعلم أن الشكل الوسيطي لمعادلة الدائرة هو

$$\begin{cases} x=R\cos t+x_0 \\ y=R\sin t+y_0\end{cases}$$

أي إن المنحني المطلوب

يمثل الربع الأول من الدائرة التي نصف قطرها 3 ومركزها (1,1)

$$L(\gamma)=\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-3\sin t+3\cos t|\,dt$$



$$L(\gamma)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2 t+9\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\,dt=\frac{3\pi}{2}$$

وظيفة: مثل هندسياً كل من المنحنيات العقدية التالية ثم احسب طولها

$\boxed{1}$ $\gamma_1:\gamma_1(t)=\cos t+i\sin t\ ;\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{2}$ $\gamma_2:\gamma_2(t)=\cos^2 t+i\sin^2 t\ ;\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{3}$ $\gamma_3:\gamma_3(t)=\cos^3 t+i\sin^3 t\ ;\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

انتهت المحاضرة