# نظرية الفئات

## المحاضرة الأولى

١٦/٣/٢٠١٥

**تذكرة:**

* الزمرة: هي مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل $(G, *)$
* الحلقة: مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل $(R, +, \circ)$
* الفضاء الشعاعي: مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية وخارجية ومجموعة مؤثرات وهي عبارة عن حقل: $(V, +, \circ, K)$

- تم إدخال مفهوم الفئات للتعامل مع المجموعات الكبيرة.

## الفئات:

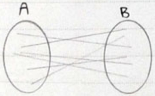
**تعريف:** نقول إنه لدينا فئة $\mathcal{C}$ إذا كان لدينا:

١- صف أشياء: ونرمز له $ob(\mathcal{C})$، ونرمز لعناصره بالشكل:
$A, B, C, \ldots$

٢- صف مورفيزمات: ونرمز له $Mor(\mathcal{C})$، عناصره أسهم من الشكل $A \to B$ حيث البداية والنهاية أشياء من الصف الأول أي $A,B \in ob(\mathcal{C})$

- وحيث كلاً من صفي الأشياء والمورفيزمات يحققان الشروط الآتية:

① أياً كان $A,B \in ob(\mathcal{C})$ نرمز لجميع الأسهم من $A$ إلى $B$ بالشكل:




$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$$
اختصاراً

فيجب أن يشكل $\mathcal{C}(A,B)$ مجموعة.

② أياً كان $A,B,D\in ob(\mathcal{C})$ يوجد تطبيق:

$$\mu: \mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,D)\longrightarrow \mathcal{C}(A,D)$$

جداء ديكارتي

معرف بالشكل: $\forall (u,v)\in \mathcal{C}(A,B)\times \mathcal{C}(B,D)$

أي: $u:A\longrightarrow B \quad , v: B\longrightarrow D$ مورفيزمان

فإن: $\mu((u,v)) = v.u \in \mathcal{C}(A,D)$

ويسمى تركيب (ضرب) المورفيزمات.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v.u"'] & B \arrow[d, "v"] \\
 & D
\end{tikzcd}$$

③ عملية تركيب المورفيزمات تجميعية بمعنى أنه أياً كانت المورفيزمات:

$u: A\longrightarrow B \quad , v: B\longrightarrow D \quad , w: D\longrightarrow C$

بحيث $A,B,C,D\in ob(\mathcal{C})$

فيمكن أن نقوم بتركيبها:

$$A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{v}D\xrightarrow{w}C$$

$$(w.v).u = w.(v.u)$$

④ أياً كان $A\in ob(\mathcal{C})$ فيوجد المورفيزم المطابق: $I_A: A\longrightarrow A$

والذي يحقق لأجل أي مورفيزمين:

$\alpha: A\longrightarrow B \quad , \beta: D\longrightarrow A$

بحيث $A,B,D\in ob(\mathcal{C})$

فإن:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & B \\
A \arrow[u, "I_A"] \arrow[ur, "\alpha.I_A"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "I_A.\beta"'] & A \arrow[d, "I_A"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

$\alpha.I_A = \alpha$ $\qquad$ $I_A.\beta = \beta$

(أي أنه يلعب دور العنصر الحايد)

⑤ أياً كان $A, B, A', B' \in ob(\mathcal{G})$ تحقق:

$$(A, B) \neq (A', B')$$

فإن: $\mathcal{G}(A,B) \cap \mathcal{G}(A',B') = \phi$

(ومعنى ذلك أنه لا يمكن لمورفيزمين أن يتساويا إذا اختلفت بدايتهما أو نهايتهما)

- عندما تتحقق الشروط السابقة نقول إنه لدينا فئة.

## أمثلة:

* فئة المجموعات: Sets

صف الأشياء مؤلف من المجموعات.

وصف المورفيزمات مؤلف من التطبيقات

* فئة المجموعات المرتبة: Ord

صف الأشياء هو المجموعات المرتبة جزئياً.

وصف المورفيزمات هو التطبيقات التي تحافظ على علاقة الترتيب.

* فئة الزمر: $\mathcal{G}$

صف الأشياء يتألف من الزمر.

صف المورفيزمات مؤلف من التشاكلات الزمرية.

* فئة الزمر التبديلية: Ab

صف الأشياء يتألف من الزمر التبديلية.

صف المورفيزمات يتألف من التشاكلات الزمرية.

* الفئة وحيدة الشيء:

صف الأشياء مؤلف من العنصر الوحيد $X$.

صف المورفيزمات مؤلف من: $I_X : X \longrightarrow X$

دان: $\mathcal{G}(X,X) = \{I_X , \alpha : X \longrightarrow X\}$

* الفئة ثنائية الشيء :

صف الأشياء مؤلف من شيئين $X , Y$

صف المورفيزمات مؤلف من : $I_X , I_Y , \alpha : X \longrightarrow Y$

* إذا كانت P مجموعة مرتبة، وكان $a \in P$ فإن a يشكل فئة وحيدة الشيء

حيث صف الأشياء يتألف من a

وصف المورفيزمات يتألف من $a \xrightarrow{\rho} a$ ⇐ علاقة انعكاسية

* إذا كانت P مجموعة مرتبة، وكان $a , b \in P$ بحيث $a \leq b$

عندئذٍ $a , b$ يشكلان فئة ثنائية الشيء حيث صف المورفيزمات

يتألف من :

$$a \xrightarrow{\rho} a$$

$$b \xrightarrow{\rho} b$$

$$a \xrightarrow{\leq} b$$

تذكرة:

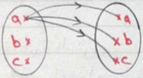
- ليس من الضروري في المجموعة المرتبة أن يرتبط كل عنصرين ببعضهما.
- أية مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لمجموعة في نفسها هي علاقة.

مثال: لتكن المجموعة $A = \{a , b , c , d\}$

ولتكن العلاقة $\rho \subset A \times A$ بحيث :

$$\rho = \{ (a , a) , (a , b) , (a , c) \}$$

عندئذٍ يمكن تمثيل العلاقة بالبيان :




وإذا كان عنصران ما غير مرتبطين :

مثل $c , d$ نكتب : $(c , d) = \Phi$

## الفئة الجزئية:

**تعريف:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة. نقول إن $\mathcal{C}'$ فئة جزئية في $\mathcal{C}$ إذا كان:

1) $ob(\mathcal{C}') \subset ob(\mathcal{C})$

تجاوزاً (لأنه لا توجد علاقة احتواء بين الصفوف)

2) $Mor(\mathcal{C}') \subset Mor(\mathcal{C})$

وبشكل آخر:

$$\forall A,B \in ob(\mathcal{C}') : \mathcal{C}'(A,B) \subseteq \mathcal{C}(A,B)$$

- إن المورفيزمات المطابقة في $\mathcal{C}'$ هي نفسها المورفيزمات المطابقة في $\mathcal{C}$
- تركيب المورفيزمات في $\mathcal{C}'$ هو نفسه تركيب المورفيزمات في $\mathcal{C}$.

**مثال:** إن فئة الزمر التبديلية تشكل فئة جزئية من فئة الزمر.

---

## الفئة الثنوية:

**تعريف:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة. إن الفئة الثنوية للفئة $\mathcal{C}$ هي $\mathcal{C}^{op}$ أو $\mathcal{C}^{o}$ وهي:

صف الأشياء فيها هو: $ob(\mathcal{C}^{op}) = ob(\mathcal{C})$

صف المورفيزمات: $A,B \in ob(\mathcal{C}) : \mathcal{C}^{o}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$

(عكسنا اتجاه الأسهم)

- إن $\mathcal{C}^{o}$ تشكل فئة (تحقق من ذلك)

**نتيجة:** لأجل أية فئة توجد الفئة الثنوية.

لأجل أية فئة $\mathcal{C}$ فإن الفئة الثنوية $\mathcal{C}^{o}$ هي فئة

ويمكن أن نأخذ الفئة الثنوية لـ $\mathcal{C}^{o}$ وهي $(\mathcal{C}^{o})^{o}$ ويكون:

$(\mathcal{C}^{o})^{o} = \mathcal{C}$ (أثبت ذلك)

---

انتهت المحاضرة الأولى