« المحاضرة الحادية عشرة »

5* المناطق الإقليدية ، المثاليات الرئيسية ، مناطق التحليل الوحيد .

5.1. تعريف :

- لتكن R حلقة تبديلية ، $r, r' \in R$ .. عندئذٍ :

*) - r' تقسم r إذا تحقق :

$\exists t \in R : r = r'.t$

ونرمز لذلك « $r' \backslash r$ » ..

**) - r غير قابل للتحليل في R ، إذا تحقق :

$r \neq 0 \wedge r \notin U(R) : s,t \in R : r = s.t$
$\Rightarrow s \in U(R) \vee t \in U(R)$

يكتب كجداء عنصرين أحدهما قابل للقلب .

***) - r عنصر أولي في R ، إذا تحقق :

$0 \neq r \notin U(R) : s,t \in R : r \backslash s.t$
$\Rightarrow r \backslash s \vee r \backslash t$

****) - r و r' مترادفان (متوافقان / متشاركان) إذا تحقق :

$\exists u \in U(R) ; r' = ur \vee \langle r \rangle = \langle r' \rangle$

- أمثلة :

1- $R = (\mathbb{Z}, +, .)$ ، $p = 2$ أولي و غير قابل للتحليل ..

$2, -2$
$2 = -1(2)$ ، $-1 \in U(R)$

« $\forall a \in \mathbb{Z}$ ؛ $\{\mp a\}$ « مترادفان » »

2- $R = (\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$ ، $U(R) = \{1, 5, 7, 11\}$ « القابلة للقلب »

$10 = \underset{\in U(R)}{5} \otimes 2 \Rightarrow 10, 2$ « مترادفان » ، $8 = \underset{\notin U(R)}{2} \otimes \underset{\notin U(R)}{4}$ - قابل للتحليل .

Subject: / /

تمرين : - وظيفة -

- لتكن R حلقة تبديلية .
$\boxed{1}$ - إذا كان r عنصر أولي ، فإنه ليس بالضرورة أن يكون r غير قابل للتحليل في R .

$\boxed{2}$ - إذا كان r عنصر غير قابل للتحليل ، فإنه ليس بالضرورة أن يكون r أولي في R .

$\boxed{3}$ - إذا كانت R هي ID ، فإن كل عنصر أولي هو غير قابل للتحليل في R ، بين أن العكس ليس صحيح بالضرورة . دورية نموذج

5_2 - تعريف :
- لتكن R هي ID ، عندئذٍ :
*) - R حلقة إقليدية ، إذا وجدت دالة $\varphi : R / \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ تحقق :

$$\forall a, b \in R / \{0\} : \exists r, q \in R \; ; \; b = aq + r \; : \; r = 0 \;\vee\; \varphi(r) < \varphi(a)$$

**) - R منطقة مثاليات رئيسية PID ، إذا كان كل مثالي $I \trianglelefteq R$ هو مثالي رئيسي ، أي :

$$\exists a \in R \;,\; I = \langle a \rangle$$

***) - R حلقة تحليل وحيد ، إذا تحقق :

$$\forall\, 0 \neq r \in U(R) \;\; ; \;\; r = \prod_{i=1}^{n} P_i$$

- جداء منتهي لعناصر أولية في R ، P_i عنصر أولي في R .
ونرمز لها (UFD)

- أمثلة :

[1] - $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، R هي ID ..

- نعرف الدالة .. $\varphi : R / \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$

حيث تحقق :

$$\forall r \in R / \{0\} \; ; \; \varphi(r) = |r|$$

وتحقق :

$$\forall a, b \in R / \{0\} \; ; \; \exists q, r \in R : b = aq + r \; ,$$
$$r = 0 \; \vee \; |a| > |r|$$

وبالتالي تكون $\mathbb{Z}$ هي منطقة إقليدية .

[2] - R حقل ، فإن : $R[x]$ هي منطقة إقليدية .

- إن $R[x]$ هي منطقة إقليدية .. لأن : (من تعريف سابقاً : R حقل $\Leftarrow$ R ID)

$$\wedge \quad \varphi : R[x] / \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$: \forall f \in R[x] / \{0\} \; ; \; \varphi(f) = \deg(f)$$

- ومن خوارزمية القسمة ..

$$\forall f, g \in R[x] / \{0\} \; ; \; \exists q(x), r(x) \in R[x] :$$
$$g = fq + r \quad \wedge \; (r = 0 \quad \vee \; \deg(r) < \deg(f))$$

[3] - كل من : $\mathbb{Q}[x]$ ، $\mathbb{R}[x]$ ، $\mathbb{C}[x]$ ..

كلها مناطق إقليدية ..

5 - 3 - مبرهنة . وردت عدة مرات

- إذا كانت R هي إقليدية ، فإن : R هي PID ..

« الإثبات » ..

- لتكن $I \trianglelefteq R$ ، نميز حالتين :

[1] - if $I = \langle 0 \rangle \Rightarrow$ يتم المطلوب .

[2] - if $\langle 0 \rangle \subsetneqq I \Rightarrow$

Subject: / /

- بما أن R حلقة إقليدية ، فإنه يوجد .
$$\varphi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$$
و $I \supsetneq \langle 0 \rangle$ ، فإنه يوجد $a \in I$ .. بحيث يكون $\varphi(a)$ أصغري ..

ولنبرهن أن : « $I = \langle a \rangle$ » « ...... »

$*$ - $a \in I \Rightarrow$ « $\langle a \rangle \subseteq I$ »

$**$ - $\forall b \in I : b \neq 0 \Rightarrow$ « حسب خوارزمية القسمة »
$\exists q, r \in R : b = aq + r$!
$r = 0 \lor \varphi(r) < \varphi(a)$

- نفرض جدلاً أن : « $r \neq 0$ » $\Leftarrow$ $r = \underset{\in I}{b} - \underset{\in I}{aq} \in I$

- ولكن - « $\varphi(r) < \varphi(a)$ »

وهذا غير ممكن - لأن : $\varphi(a)$ أصغري .. ومنه يكون الفرض الجدلي خاطئ $\Leftarrow$ « $r = 0$ »

$\Rightarrow b = aq \Rightarrow b \in \langle a \rangle \Rightarrow$ « $I \subseteq \langle a \rangle$ »
$\Rightarrow I = \langle a \rangle$
مثالي رئيسي ..

$\Leftarrow$ R هي PID .

#

$R[x]$ إقليدية عندما R حقل و $R[x]$ من متغير واحد فقط ، مثلاً : $R[x, y]$ ليست إقليدية لا نه يوجد فيها مثالي حدوده تعتمد على x و y .
$\Leftarrow$ في هذه الحالة $R[x, y]$ ليست PID ..

٢١

5 _ 4 _ مبرهنة :

_ لتكن R هي PID و $0 \neq r \in R$ .. القضايا التالية صحيحة :

[1] _ r غير قابل للتحليل في R $\iff$ $\langle r \rangle \lhd \cdot R$

[2] _ إذا كان r غير قابل للتحليل ، فإن r أولي في R .

[3] _ $Spec(R) = m\text{-}Spec(R) \cup \{0\}$

$x \in \langle r \rangle \iff \exists y \in R , x = y.r$

«الإثبات» ..

[1] _ «$\Leftarrow$»

_ ليكن I مثالي في R محقق :

$$\langle r \rangle \subseteq I \subseteq R$$

_ بما أن R منطقة مثاليات رئيسية ، فإن :

$\exists a \in R ; I = \langle a \rangle \quad , r \in \langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R$

$\Rightarrow \exists x \in R : r = x.a$

$\Rightarrow x \in U(R) \vee a \in U(R)$

$\Rightarrow$ «مترادفان» a, r $\vee I = R$ (لأنه [illegible] $r = x.a$)

$\Rightarrow \langle r \rangle = I \vee I = R$

$\Rightarrow \langle a \rangle \lhd \cdot R$ «من كلا الحالتين»

#

«$\Rightarrow$»

_ بما أن كل مثالي أعظمي في الحلقة التبديلية الواحدية هو مثالي أولي

فإن $\langle r \rangle$ مثالي أولي .. ومنه r عنصر أولي .. لأن :

[illegible] $0 \neq r \notin U(R) \wedge s, t \in R : r \mid s.t$

$\Rightarrow s.t = u.r : u \in R \Rightarrow s.t \in \langle r \rangle$

_ وحسب تعريف المثالي الأولي

$\Rightarrow s \in \langle r \rangle \vee t \in \langle r \rangle \Rightarrow$

$\{\exists u_1 \in R : s = u_1 . r\}$

$\vee \{\exists u_2 \in R : t = u_2 . r\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r \mid s \vee r \mid t \Rightarrow$ r عنصر أولي

وبالتالي r غير قابل للتحليل . $\Leftarrow$

$\triangleleft$

[2] - r غير قابل للتحليل ..(افرضنا).. $\Leftarrow$. حسب [1] .

$r \triangleleft R \Leftarrow$ $\langle r \rangle$ مثالي أولي .. ومنه يكون

r عنصر أولي لأن :

$0 \neq r \notin U(R) \wedge s,t \in R : r \mid s.t$

$\Rightarrow s.t = u.r : u \in R \Rightarrow s.t \in \langle r \rangle$

- و حسب تعريف المثالي الأولي ..

$\Rightarrow s \in \langle r \rangle \vee t \in \langle r \rangle \Rightarrow$ من (*)

$\{\exists u_1 \in R : s = u_1 . r\}$

$\vee \{\exists u_2 \in R : t = u_2 . r\}$

$\Rightarrow r \mid s \vee r \mid t \Rightarrow$ r عنصر أولي

#

[3] - نعلم أن كل مثالي أعظمي في الحلقة الواحدية هو مثالي أولي ، فتكون :

$((M\text{-}Spec(R) \subseteq Spec(R)))$

ولأن $\langle 0 \rangle$ مثالي أولي فإنه :

$\Rightarrow ((M\text{-}Spec(R) \cup \{0\} \subseteq Spec(R)))$

* - $\forall P \in Spec(R) \Rightarrow$: نميز حالتين :

[1] - $P = \langle 0 \rangle$

[2] - $P \neq \langle 0 \rangle \Leftarrow$ كونها PID فإنه :

$\exists r \in R : P = \langle r \rangle \Rightarrow$ r عنصر أولي لأن :

$0 \neq r \notin U(R) \wedge s,t \in R : r \mid s.t$

$\Rightarrow s.t = u.r : u \in R \Rightarrow s.t \in \langle r \rangle$

- ومن تعريف المثالي الأولي :

$\Rightarrow s \in \langle r \rangle \vee t \in \langle r \rangle \Rightarrow$ من ⓐ

$\{\exists u_1 \in R : s = u_1 . r\}$

$\vee \{\exists u_2 \in R : t = u_2 . r\}$

$\Rightarrow r \mid s \vee r \mid t \Rightarrow$ r عنصر أولي

«كل أولي غير قابل للتحليل»

- وبما أن R هي ID ⇐ r غير قابل للتحليل في R ⇐ من II

$\langle r \rangle \triangleleft_{\circ} R \Rightarrow P = \langle r \rangle \in M\text{-}Spec(R)$

من كلتا الحالتين $\Rightarrow P \in M\text{-}Spec(R) \cup \{0\}$

- ومن الاحتوائين نجد أن:

$Spec(R) = M\text{-}Spec(R) \cup \{0\}$

#

العكس صحيح فقط عندما R هي PID ومن مبرهنة سابقة تنص إذا R PID فإن كل غير قابل للتحليل أولي

- ملاحظة:

*- $I \triangleleft R$ أعظمي ⇐ I أولي.

if R واحدية ⇐ I أولي.

**- في المنطقة التكاملية ID ، كل عنصر أولي هو غير قابل للتحليل ، بينما العكس غير صحيح بالضرورة.

«مثال معاكس»

- لتكن $R = (\mathbb{Z}(\sqrt{5}), +, .)$ $\wedge$ $P = 3$ .. عندئذ :

⇐ P غير قابل للتحليل في R و P ليس أولي في R ..

- لنثبت أن $P = 3$ غير أولي في $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ ..

- من تعريف الأولي : .. $0 \neq P \notin U(R)$

*- $0 \neq P = 3 \notin U(R) = \{\mp 1\}$

**- $x = a + b\sqrt{-5} \wedge y = c + d\sqrt{-5} \in R$:

$P \mid x.y \Rightarrow$ «يكون أولي إذا لم يقسم الأول فلا الثاني»

ودون المساس بالعمومية أي يكفي مناقشة حالة واحدة .

Subject: .... / /

$$\Rightarrow p = 3 \mid 9 = (2+\sqrt{-5})\cdot(2-\sqrt{-5}) \Rightarrow$$

without lost of generality (w.l.o.g)

$$3 \mid (2+\sqrt{5}) \vee 3 \mid (2-\sqrt{5})$$

- لنفرض جدلاً أن p أولي ، ودون ~~المس~~ المس بالعمومية

$$\Rightarrow 3 \mid (2+\sqrt{-5}) \Rightarrow \exists x = a+b\cdot\sqrt{-5} \in R$$

$$\Rightarrow 2+\sqrt{-5} = 3\cdot x \Rightarrow 9 = 9\cdot x^2 \Rightarrow \boxed{|x=1}$$

وبالتالي : $2+\sqrt{-5} = 3$ وهذا غير ممكن ، مما يعني أن الفرض الجدلي خاطئ و p ليس أولي .

#

5-5 - مبرهنة :

- إذا كانت R هي PID ، فإن : R هي U.F.D ..

«الإثبات» :

- لتكن :

$$M = \{ \langle r \rangle \triangleleft R : 0 \neq r \notin U(R) \wedge r \neq \prod_{i=1}^{n} p_i : n \in \mathbb{N} \wedge p_i \text{ عناصر غير قابلة للتحليل} \}$$

* - نفرض جدلاً أن : $M \neq \emptyset$ ونعتبر $(M, \subseteq)$ مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء .. ولتكن :

$$\langle r_1 \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle \subseteq \ldots\ldots$$

سلسلة متزايدة من عناصر M ، ولنعرف بالتالي :

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle r_i \rangle \triangleleft R$$ «بسبب علاقة الاحتواء»

ولكن R هي PID ، $\Rightarrow \exists r \in R : I = \langle r \rangle$

ولكن : $I = \langle r \rangle = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle r_i \rangle$

$$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : r \in \langle r_i \rangle \Rightarrow \langle r \rangle \subseteq \langle r_i \rangle$$

$$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : I = \langle r \rangle = \langle r_i \rangle \in \overline{M}$$

كما أن $0 \neq r \notin U(R)$ ، لأنه إذا كان $r \in U(R)$ فإن : $\langle r \rangle = R$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : i \in \langle r_i \rangle$

وهذا غير ممكن لأن : $\langle r_i \rangle \in M$ و $r \neq \prod_{i=1}^{n} p_i$ (p_i عناصر غير قابلة للتحليل)

« لأنه لو كانت $r = \prod_{i=1}^{n} p_i$ فإن :

$\exists i \in \mathbb{N} : \langle r \rangle = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle r_i \rangle \in M$

متزايدة $\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : r \in \langle r_i \rangle \Rightarrow \langle r \rangle \subseteq \langle r_i \rangle \Rightarrow \langle r \rangle = \langle r_i \rangle$

$\Leftarrow r = r_i = \prod_{i=1}^{n} p_i$ وهذا غير ممكن »

ومما سبق نجد أن : $I \in M$ حد أعلى للسلسلة في M ، وحسب تمهيدية زورن يوجد عنصر أعظمي $m \in M$ ، أي :

$\exists x \in R : m = \langle x \rangle \ , \ 0 \neq x \notin U(R) \ , \ x \neq \prod_{i=1}^{n} p_i$

(p_i عناصر غير قابلة للتحليل) $\Leftarrow x$ قابل للتحليل ، أي أن :

$\exists s, t \in R/U(R) : x = s.t \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \langle s \rangle \\ x \in \langle t \rangle \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \langle x \rangle \subsetneq \langle s \rangle \\ \langle x \rangle \subsetneq \langle t \rangle \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\langle s \rangle , \langle t \rangle \notin M$

$\Rightarrow \exists p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n :$

$s = \prod_{i=1}^{k} p_i \ \wedge \ t = \prod_{i=k+1}^{n} p_i$: [p_i عناصر غير قابلة للتحليل]

$\Rightarrow x = s.t = p_1.p_2 \ldots\ldots p_k.p_{k+1} \ldots\ldots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$

وهذا يناقض كون : $m = \langle x \rangle \in M$ ... وبالتالي الفرض يجب أن يكون خاطئ ، أي أن :

$M = \emptyset$ .. ومنه : $\forall\, 0 \neq r \in R/U(R) : r = \prod_{i=1}^{n} p_i$

« وبما أن كل عنصر غير قابل للتحليل هو أولي (حسب مبرهنة سابقة في منطقة المثاليات الرئيسية) »

أي أن:

p_i أولية في R : $r = \prod_{i=1}^{n} p_i$: $\forall\, 0 \neq r \in R \setminus U(R)$

$\Leftarrow$ R هي UFD

#

____