المحاضرة الأولى   الدوال ذات التغير المحدود

- مقدمة في الدوال : تعريف الدالة ، الدوال المطردة ، النهايات ، الاستمرار
نقاط الانقطاع ، الاشتقاق .
- تعريف دالة التغير المحدود .
- خواص دالة التغير المحدود .
- معايير دالة التغير المحدود .
- تطبيقات دالة التغير المحدود .

1 تعريف الدالة :

$$f : X \longrightarrow Y \quad : \quad X \subseteq \mathbb{R},\ Y \subseteq \mathbb{R}$$

$$\forall\, x \in X : \exists!\, y \in Y : f(x) = y$$

" f معرفة عند $x_0 \in X$ اي ان $f(x_0)$ موجودة "

2 تعريف الدالة المطردة :
وهنا نأخذ الحالات التالية :

1. f متزايدة :

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2- f متناقصة :

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

3- f متزايدة تماماً :

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

٤ - f متناقصة تماماً :

$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

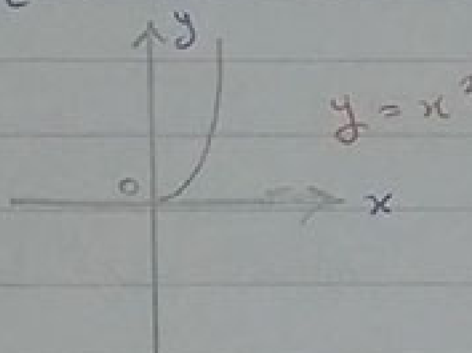
ملاحظة :

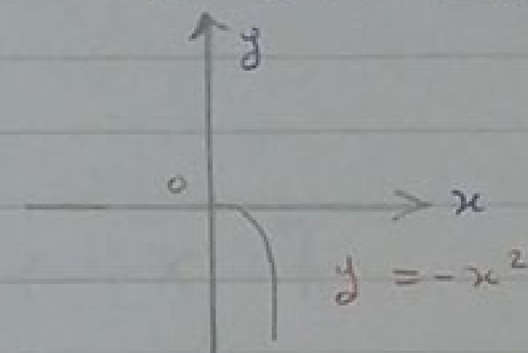
"f" متزايدة على $I \subseteq \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ "-f" متناقصة على I

"f" متناقصة على $I \subseteq \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ "-f" متزايدة على I

مثلاً الدالة f المعرفة بالشكل $f(x) = y = x^2$ متزايدة على المجال

$I = [0, +\infty[$ فإن $y = -x^2$ دالة متناقصة على $I = [0, \infty[$





$\boxed{3}$ - الدالة المحدودة :

f دالة محدودة على $I \subseteq \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M , \forall x \in I$

وهذا أيضاً يكافئ

$\exists M, m \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M , \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ - النهايات :

إذا كانت f دالة معرفة في جوار نقطة x_0 (ليس

بالضرورة f معرفة عند x_0) نقول أن لـ y نهاية ولتكن A إذا تحقق :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = A \quad ; \quad A \in \mathbb{R}$$

أو بشكل آخر : $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A \; ; A \in \mathbb{R}$

5 - الاستمرار :

إذا كانت f دالة معرفة عند النقطة x_0 ومعرفة في جوار النقطة x_0 عندئذٍ :

نقول عن f أن مستمرة عند x_0 إذا تحقق :

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$$

6 - نقاط الانقطاع :

نقول عن النقطة x_0 أن نقطة انقطاع للدالة f المعرفة على I

إذا كانت الدالة غير مستمرة عندها، ولها عدة أنواع وهي :

① نقطة انقطاع قابلة للإزالة :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = A$$

مثال :

لتكن لدينا الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ المعرفة عند $\mathbb{R} / \{+1\}$

لدينا النقطة «1» نقطة انقطاع قابلة للإزالة وذلك بتمديد التابع.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \xrightarrow{\text{تمديد التابع}} F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$$

② نقطة انقطاع من النوع الأول :

لتكن f دالة و x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول للدالة f فإن :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = A \quad ; A \in \mathbb{R} \\ \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = B \quad ; B \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \; ; \; A \neq B$$

② نقطة انقطاع من النوع الثاني:

لتكن f دالة و x_0 نقطة انقطاع من النوع الثاني فإن احدى

النهايتين في اللانهاية أو غير موجودة.

تمارين: ادرس الدوال التالية من حيث نقاط انقطاعها وحدد نوعها مع الرسم:

$\boxed{1}$. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$\boxed{2}$. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \; x > 0 \\ x & ; \; x \leq 0 \end{cases}$

$\boxed{3}$. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

انتهت المحاضرة...