الفصل الرابع: المثاليات وحلقة البواقي (يعني لها نوع قسمة)

٤-١: المثاليات والحلقات العليا.

٤-١-١: تعريف:

حلقة ما $(R,+,\cdot)$ $\phi \neq I \subseteq R$ (لا يشترط بالحلقة أن تحتوي محايد أو تبديلية)

١- نقول عن I أنه مثالي يميني في R إذا وفقط إذا تحقق الشرطين التاليين:

$* \; x\cdot r \in I \quad * \; x-y \in I \qquad x,y \in I \qquad r \in R$

ويدعى مثالي يميني ونرمز له ب $I \triangleleft_r R$

٢- نقول عن I أنه مثالي أيسر في R إذا ... R

$* \; r\cdot x \in I \quad * \; x-y \in I \qquad x,y \in I \qquad r \in R$

ويدعى مثالي أيسر ونرمز له ب $I \triangleleft_l R$

٣- I مثالي في R إذا وفقط إذا كان I مثالي يساري ويميني في R

ونرمز له بالرمز $I \triangleleft R$

ما الفرق بين الحلقة الجزئية ...
أ- الشرط الأول نفسه I ...
ب- الشرط الثاني ... $\in I$
في الحلقة الجزئية العنصران ...
أما في المثالي x متعلق ...

ملاحظة:

إذا كانت R حلقة تبديلية $(xr=rx)$ فإن المثالي الأيسر هو المثالي الأيمن (ذي نقط انعكاس)

أمثلة:

١- الحلقة الصفرية تكون المثالي الصفري، وكل حلقة R هي مثالي في نفسها

٢- $R(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\quad I = n\mathbb{Z}$ مثالي في $\mathbb{Z}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

٣- $R=(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ $\quad I = 2\mathbb{Z}_{12}$ مثالي في $\mathbb{Z}$

$I = 2\mathbb{Z}_{12} = \{0,2,4,6,8,10\}$

٤- إذا كانت $R(R[x],+,\cdot)$ $\quad I=\{x\cdot f(x) : f(x) \in R\}$ فإن $I \trianglelefteq R$

مبرهنة 4-1-2:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة تبديلية و $\mathcal{J}=\{I_i\}_{i\in J}$ مجموعة المثاليات في R

(تقاطع المثاليات مثالي في R)

عندئذ $I=\bigcap_{i\in J} I_i$ مثالي في R

الإثبات:

$$\forall i\in J : 0\in I_i \longrightarrow 0\in \bigcap_{i\in J} I_i \longrightarrow I\neq\phi$$

$$r\in R \;,\; x,y\in I=\bigcap_{i\in J} I_i$$

$$\rightarrow r\in R \;,\; x,y\in I=\bigcap_{i\in J} I_i \qquad \forall i\in J$$

$$\rightarrow x-y\in I_i \;,\; rx\in I_i$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-y\in I=\bigcap_{i\in J} I_i \\ x\cdot r\in I=\bigcap_{i\in J} I_i \end{cases}$$

$$\rightarrow I=\bigcap_{i\in J} I_i \trianglelefteq R$$

ملاحظة:

إن اجتماع المثاليات في حلقة ما مثل R ليس بالضرورة أن يكون مثالي في R

مهم تمرين:

R حلقة ما و $I_1, I_2 \trianglelefteq R$

$I=I_1\cup I_2$ مثالي في R $\longleftrightarrow$ $I_1\subseteq I_2$ أو $I_2\subseteq I_1$ الإثبات نستخدم برهان الخلف (1)

لأن الاجتماع فرضيتين شرطين

مبرهنة 4-1-3:

لتكن R حلقة تبديلية واحدية (ذات عنصر محايد) و $I\trianglelefteq R$ إن القضايا التالية صحيحة

1. إذا كان $1\in I$ فإن $I=R$
2. إذا وجد عنصر مثل $a\in I$ قابل للقلب في R فإن $I=R$

الإثبات:

1) بما أن I مثالي في $\mathbb{R}$ فإن $I \in \mathbb{R}$

$\forall r \in \mathbb{R}$ ، $r = r.1 \rightarrow \mathbb{R} \subseteq I$

ومنه $I = \mathbb{R}$

2) $a \in I$ $\quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$

$1 = a.a^{-1} \in I$

حسب (1) $\mathbb{R} = I$

4-1-4:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة و $I_1, I_2, \dots, I_n$ مثاليات في $\mathbb{R}$

* نعرف مجموع المثاليات

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \ ; \ x_i \in I_i\}$$

ونرمز له بالرمز $\sum_{i=1}^{n} I_i$

* نقول عن المجموع $\sum_{i=1}^{n} I_i$ أنه مجموع مباشر للمثاليات $I_1, I_2, \dots, I_n$

إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall x \in \sum_{i=1}^{n} I_i$ فإنه يكتب بشكل وحيد $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$1 \leq i \leq n$ $\quad x_i \in I_i$ ونرمز له بالرمز $\bigoplus_{i=1}^{n} I_i$

* نقول إن الحلقة $\mathbb{R}$ مجموع مباشر للمثاليات $I_1, I_2, \dots, I_n$ إذا وفقط إذا:

$$\mathbb{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$$

مثال:

$\mathbb{R} = (\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ $\quad I_1 = 6\mathbb{Z}_{12} = \{0, 6\}$ $\quad I_2 = 4\mathbb{Z}_{12} = \{0, 4, 8\}$

$I_3 = 2\mathbb{Z}_{12} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad I_1, I_2, I_3$ مثاليات في $\mathbb{R}$.

إن $I_1 \oplus I_2$ مجموع مباشر لأن كل عنصر يكتب بشكل وحيد

$I_1 \oplus I_3$ ليس مجموع مباشر لأن $8 = 2 + 6 = 0 + 8$ يكتب بشكلين مختلفين

مبرهنة: 5-1-4

لتكن R حلقة و $I, J \trianglelefteq R$

1) $I+J \trianglelefteq R$ $\quad$ $I \cdot J \trianglelefteq R$ $\quad$ $I \subseteq I+J$ و

$J \subseteq I+J$ $\quad$ $(I:J) \trianglelefteq R$

2) اذا كانت $I_1, I_2, \dots, I_n$ مثاليات في R فان

$\sum_{i=1}^{n} I_i \trianglelefteq R$ و $\prod_{i=1}^{n} I_i \trianglelefteq R$

تعريف:

لتكن R حلقة و $I, J \trianglelefteq R$

1) $I \cdot J = \{\sum_{i} x_i y_i \; ; \; x_i \in I , y_i \in J \; ; \; i \in N\}$ وهو مجموع منتهي لحاصل ضرب عنصرين

2) نعرف $I/J = I:J = \{r \in R \; ; \; rJ \subseteq I\}$

3) لتكن $\phi \neq S = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \subseteq R$

نعرف المثالي المولد بالمجموعة S بالشكل:

$$\langle S \rangle = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \; ; \; x_i \in R\}$$

ويمثل أصغر مثالي يحوي المجموعة S [او تقاطع كل المثاليات التي تحوي S]

وإذا كانت S مكونة من عنصر وحيد هو r فان المثالي المولد بها

يسمى مثالي رئيسي $\langle r \rangle = \{r\}$ (مثالي مولد بعنصر وحيد)

4) تعريف الجذر المثالي I بالشكل:

$\sqrt{I} = \{x \in R \; , \; \exists n \geq 0 \;$ و $\; x^n \in I\}$ يسمى جذر

وهي تعني مجموعة جميع العناصر التي إذا رفعت n لها قوة تنتمي لـ I

أمثلة:

1- $R = (Z, +, \cdot)$ $\quad$ $\langle 4n + 4r \rangle = \langle 4 \rangle = \{0, \mp 4, \mp 8, \mp 12, \dots\}$

$r \in R = Z$ $\quad$ $n \in N$

$\langle 6 \rangle = \{0, \mp 6, \mp 12, \mp 18, \dots\}$

وهو المضاعف المشترك الأصغر $\langle 4\rangle + \langle 6\rangle = \langle 12\rangle$

وهو القاسم المشترك الأكبر $\langle 4\rangle \cdot \langle 6\rangle = \langle 2\rangle$

تعريف:

نقول عن حلقة R أنها حلقة تكاملية انها حلقة مثاليات رئيسية (منطقة مثاليات رئيسية)

إذا وفقط إذا: كان كل مثالي فيها هو مثالي رئيسي (مولد بعنصر واحد)

أمثلة:

1) R الحلقة مع نفسها مثالي رئيسي في نفسها (لأنها مولدة بـ 1) $\langle 1\rangle = R$

2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ R حلقة مثاليات رئيسية:

الإثبات لـ(2):

نثبت أن أي مثالي في $\mathbb{Z}$ مولد بعنصر وحيد

ليكن $I \trianglelefteq R$ نميز حالتين: I مثالي صفري فهو مولد بـ 0 $R = \langle 0\rangle$ فيتم المطلوب $I = \{0\}$

$I \neq \{0\}$

ليكن $m \in I$ عدد صحيح موجب ينتمي لـ m

ولنثبت أن مثالي I مولد بهذا العنصر

ممكن أن تكون I مجموعة من الأعداد السالبة ذلك غير ممكن لأنه لكل عدد سالب نظير موجب وبالتالي m موجود.

ليكن $n \in I$ حسب خوارزمية القسمة $\exists\, r, q \in \mathbb{Z}$

$0 \leq r < m$ و $n = mq + r$ و

نفرض جدلاً أن $r \neq 0$ $r = \underbrace{\overbrace{n - mq}^{\in I}}$

$x \in \langle r\rangle \longleftrightarrow r \backslash x$

$\exists\, y \in R \quad x = r \cdot y$

$r \in I$ لأن هذا يناقض فرض كون m أصغر عدد موجب صحيح $I \trianglelefteq \in$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ ومنه $r = 0$ فيكون $n = mq$

$n \in \langle m\rangle \longrightarrow I \subseteq \langle m\rangle$

مجموعة محتواة فيها. $\langle m\rangle \subseteq I$ (لأنها أصغر مولد تحوي هذه المجموعة)

(من الاستنتاجين) $I = \langle m\rangle$ فهو مثالي رئيسي [لأنه مولد بعنصر وحيد]

3) إذا كانت $\mathbb{R}$ حقل فإن $\mathbb{R}[x]$ هي حلقة مثاليات رئيسة.

كل حقل هو Id هو حلقة مثاليات رئيسة.

الإثبات:

$f(x) \in F[x]$ هي كثيرة حدود ذات الدرجة الأصغر التي تنتمي لـ I ، I مثالي اختياري في $\mathbb{R}[x]$

← إذا كان $I = \{0\}$ يتم المطلوب

← $I \neq \{0\}$ يتم الإثبات وفق ما يلي

لتكن الحدودية ذات الدرجة الأصغر لـ $f(x)$ التي تنتمي لـ I المثالي

ولنثبت أن $I = \langle f(x) \rangle$

نميز حالتين: ← $f(x) \in \mathbb{R}$ (حدودية ثابتة) (عنصر من $\mathbb{R}$)

في $\mathbb{R}$ (حقل) أي عنصر قابل للقلب

وحسب مبرهنة سابقة $I = \mathbb{R}$ وبالتالي يكون I مثالي رئيسي مولد بـ 1

يتم المطلوب

← $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ (الحدودية غير ثابتة)

$\deg(f(x)) \neq 0$

لنبرهن أن $I = \langle f(x) \rangle$

$f(x) \in I \Rightarrow \langle f(x) \rangle \subseteq I.$

$\forall\, g(x) \in I$

حسب خوارزمية القسمة $\exists\, q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$

$g(x) = q(x) \cdot f(x) + r(x)$

بحيث $r(x) = 0$ أو $\deg(r(x)) < \deg(f(x))$

نفرض جدلاً أن $r(x) \neq 0$ ، $r(x) = \underbrace{g(x)}_{\in I} - \underbrace{f(x)q(x)}_{\in I}$

وهذا يناقض كون $f(x)$ ذات الدرجة الأصغرية التي تنتمي للمثالي I ومنه

الفرض الجدلي خاطئ ومنه $r(x) = 0$ و $g(x) = f(x)q(x) \in \langle f(x) \rangle$

$I \subseteq \langle f(x) \rangle$ ، $I = \langle f(x) \rangle$

فتكون الحلقة حلقة مثاليات رئيسية

حقل لا يحوي إلا المثاليين نفسه والصفري لأن أي مثالي يحوي عنصر قابل للقلب

إذا كانت R حقل فإن R[x] (بالإثبات) في حلقة مثاليات رئيسية

هل كل R حلقة تحقق أنه R[x] في حلقة مثاليات رئيسية ؟

تمرين :

إذا كانت $\mathbb{R}=(\mathbb{Z},+,\cdot)$ تبديلية وواحدية

$$I=\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; : a_i\in \mathbb{R} \; ، \; a_i = 0 (\bmod 2)\right\}$$

ليس بالضرورة أن تكون $\mathbb{R}[x]$ حلقة مثاليات رئيسية.

مبرهنة: 4-1-7

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة تبديلية. $I_1, I_2, \dots, I_n$ مثاليات في $\mathbb{R}$

إن الشروط التالية متكافئة :

1) إن $\sum_{i=1}^{n} I_i$ مجموع مباشر

2) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \to a_i = 0 \qquad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$

3) $I_i \cap \sum_{j\neq i} I_j = \{0\}$

الإثبات:

من 1 ← 2 ، الفرض مجموع مباشر :

$0=\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\dots+a_n$ أي عنصر يكتب بشكل وحيد.

$0=0+0+\dots+0$

$\to a_1=0 \quad a_2=0 \quad \dots \quad a_n=0$

$\to a_i=0 \quad \forall i=\{1,2,\dots,n\}$

2 ← ~~3~~ :

$$\forall x\in I_i \cap \sum_{j\neq i} I_j \to$$

$$\to \begin{pmatrix} x\in I_i \\ x\in \sum_{j\neq i} I_j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \exists x_i\in I_i \; : x=x_i \\ \exists x_1\in I_1 \; ، x_2\in I_2 , \dots, x_{i-1}\in I_{i-1} \\ x_{i+1}\in I_{i+1} , \dots , x_n\in I_n. \end{pmatrix}$$

$$x = x_1+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+\dots+x_n.$$

$$x_i = x = x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n$$

$$0 = x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + (-x_i) + (x_{i+1} + \dots + x_n)$$

$2 \text{ من} \rightarrow \quad x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$0 = x_i = x \in I_i \cap \sum_{j \neq i} I_j = \{0\}$$

$1 \leftarrow 3$

من تعريف المجموع $\quad x \in \sum_{i=1}^{n} I_i \rightarrow x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$x_i \in I_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

نفرض ان x يكتب بشكلين

$$x = y_1 + y_2 + \dots + y_n \qquad y_i \in I_i \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$x = x$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

بالطرح $\rightarrow \quad 0 = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_n - x_n)$

$$0 = (y_1 - x_1) + \dots + (y_{i-1} - x_{i-1}) + (y_i - x_i) + \dots + (y_n - x_n)$$

$$x_i - y_i = (y_1 - x_1) + \dots + (y_{i-1} - x_{i-1}) + (y_{i+1} - x_{i+1}) + \dots + (y_n - x_n)$$

$\in I_i \quad \underbrace{x_i}_{\in I_i} - \underbrace{y_i}_{\in I_i} = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

$$\in \sum_{j \neq i} I_j \in I_i \cap \sum_{j \neq i} I_j = \{0\}$$

من الفرض

منه $\quad x_i - y_i = 0 \rightarrow x_i = y_i \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

وبالتالي تكتب بشكل وحيد

ومنه مجموع I_i $\quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$\sum_{i=1}^{n} I_i$ هو مجموع مباشر