eman . الاثنين

المحاضرة التاسعة

13/4/2015

مبرهنة : Maschke :

اذا كان $T: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً لزمرة منتهية G على فضاء $V(F)$ وكان مميز الحقل F لا يقسم مرتبة الزمرة G فإن التمثيل T يكون خزولاً تماماً.

البرهان: يوجد طريقتين للبرهان هما:

1- بلغة المصفوفات:

- اذا كان التمثيل T غير خزول فهو خزول تماماً فالمبرهنة صحيحة.
- اما اذا كان التمثيل T خزول لنبرهن على انه خزول تماماً.

اذاً من الفرض لدينا T خزول وبالتالي من اجل كل $a \in G$ فإن مصفوفة المؤثر T_a تكون من الشكل: شبه مثلثية.

$$T_a = \left(\begin{array}{c|c} T_1(a) & V(a) \\ \hline 0 & T_2(a) \end{array}\right)$$

لكي يكون التمثيل T خزول تماماً يجب ان تكون مصفوفته شبه قطرية اي لنبرهن على وجود مصفوفة مقلوبة C بحيث تجعل المصفوفة T_a تشابه مصفوفة قطرية كما يلي:

$$C^{-1}.T_a.C = \left(\begin{array}{c|c} T_1(a) & 0 \\ \hline 0 & T_2(a) \end{array}\right)$$

فبما ان T تشاكل زمري اي اياً كان $a,b \in G$ فإن:

$$T(a.b) = T(a).T(b)$$

لنعبر عن العلاقة الأخيرة بلغة المصفوفات:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} T_1(a.b) & V(a.b) \\ \hline 0 & T_2(a.b) \end{array}\right)}_{T(a.b) = T_{a.b}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} T_1(a) & V(a) \\ \hline 0 & T_2(a) \end{array}\right)}_{T_a = T(a)} . \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} T_1(b) & V(b) \\ \hline 0 & T_2(b) \end{array}\right)}_{T(b) = T_b}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} T_1(a).T_1(b) & T_1(a).V(b) + V(a).T_2(b) \\ \hline 0 & T_2(a).T_2(b) \end{array}\right)$$

ومنه: $V(a.b) = T_1(a).V(b) + V(a).T_2(b)$

بضرب العلاقة الأخيرة بـ $T_2^{-1}(b)$:

$\longrightarrow V(a) = V(a.b).T_2^{-1}(b) - T_1(a).V(b).T_2^{-1}(b)$

- $T_2(b)$ مؤثر خطي وبالتالي مقلوب المؤثر الخطي المعين بـ b هو المؤثر الخطي المعين بمقلوب b.

ALAWIB.net

$$\Rightarrow \quad V(a) = V(a.b).T_2(b^{-1}) - T_1(a).V(b).T_2(b^{-1})$$

$$= V(a.b).T_2(b^{-1}).\underbrace{T_2(a^{-1}).T_2(a)}_{I} - T_1(a).V(b).T_2(b^{-1})$$

مصفوفة واحدية .

$$= V(a.b).\underbrace{T_2(a.b)^{-1}}.T_2(a) - T_1(a).V(b).T_2(b^{-1}).$$

حسب خواص مقلوب مؤثر مستبدلا عنصرية .

ومنه بجعل b تمسح كل عناصر G ثم اخذ المجموع للطرفين :

$$\sum_{b\in G} V(a) = \sum_{b\in G}\left(V(a.b).T_2(a.b)^{-1}.T_2(a) - T_1(a).V(b).T_2(b^{-1})\right)$$

$$\sum_{b\in G} V(a) = \sum_{b\in G} V(a.b).T_2(a.b)^{-1}.T_2(a) - \sum_{b\in G} T_1(a).V(b).T_2(b^{-1})$$

$$|G|.V(a) = \sum_{b\in G} V(a.b).T_2(a.b)^{-1}.T_2(a) - \sum_{b\in G} T_1(a).V(b).T_2(b^{-1})$$

★ ملاحظة ≪ ان العلاقة $\sum_{b\in G} V(a) = |G|.V(a)$ عندما b تمسح جميع عناصر G . كون G زمرة منتهية

وهنا استخدمنا الفرض " ان مميز الحقل F لا يقسم $|G|$ "

لأنه لو كان مميز الحقل F يقسم مرتبة الزمرة ، وبالتالي $|G|$ مرتبة الزمرة مضاعف لمميز الحقل F

ليكن المميز هو p عندئذ $|G| = mp$ وبالتالي عند جداء $|G|$ بـ المصفوفة $V(a)$ التي هي من

الحقل F اي كل عنصر من المصفوفة ليكن $\alpha \in F$ سيضرب بـ $|G|$ عندئذ :

$$|G|.V(a) = (m.p).V(a)$$

لانه مميز فالجداء = 0

$$\Rightarrow |G|.(\alpha) = (m.p).\alpha = m.(p.\alpha) = m.0 = 0$$

وبالتالي تصبح المصفوفة $V(a)$ مصفوفة صفرية ≪

$$\Rightarrow \quad V(a) = |G|^{-1}\left(\sum_{b\in G} V(a.b).T_2(a.b)^{-1}.T_2(a) - \sum_{b\in G} T_1(a).V(b).T_2(b^{-1})\right)$$

لنفرض أن : $\sum_{x\in G} V(x).T_2(x^{-1}) = S ; x \in G$:

بالتعويض نجد :

$$V(a) = |G|^{-1}\left[S.T_2(a) - T_1(a).S\right]$$

حيث b تمسح كل عناصر G ، بالتالي

$\Sigma V(a.b).T_2(a.b)^{-1} = S$ $\quad x = a.b$

$\Sigma V(b).T_2(b)^{-1} = S$ $\quad x = b$

وبفرض $|G|^{-1}S = S'$ نجد :

$$\boxed{V(a) = S'.T_2(a) - T_1(a).S'} \;\ldots\ldots ⊛$$

ALADIB.net

لنأخذ المصفوفة:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & S' \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$$

حيث I_1 المصفوفة الواحدية مرتبتها من درجة التمثيل $T_1(a)$

I_2 المصفوفة الواحدية مرتبتها من درجة التمثيل $T_2(a)$

واضح أن C مصفوفة قلوبة ومقلوبها هو:

$$C^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & -S' \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$$

لنتحقق من أن C^{-1} مقلوب C:

$$C.C^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 & S' \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_1 & -S' \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & +S'-S'=0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = I$$

≪ هنا لا داعي لإثبات أن $I = C^{-1}.C$ ، إذاً الشرط الكافي هو إثبات $C.C^{-1} = I$ ويتم برهان ذلك باستخدام المؤثرات الخطية حيث كل مصفوفة مربعة تقابل مؤثر خطي. ≪

بالعودة للبرهان: نجد أن يكون:

$$C^{-1}.T_a.C = \begin{pmatrix} I_1 & -S' \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(a) & V(a) \\ 0 & T_2(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & S' \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1(a) & V(a) - S'.T_2(a) \\ 0 & T_2(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & S' \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1(a) & T_1 S' + V(a) - S' T_2(a) \\ 0 & T_2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(a) & 0 \\ 0 & T_2(a) \end{pmatrix}$$ حسب (*)

إذاً أن مصفوفة التمثيل T_a تشابه مصفوفة قطرية وبالتالي التمثيل T مختزلاً تماماً.

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفوفتين مربعتين A, B وطلب إثبات أن B مقلوب A.

فيكفي إثبات أن $A.B = I$ لأن:

$$AB = I \iff B.A = I$$

يتم برهان ذلك باستخدام المؤثرات الخطية: مثلاً A تقابل المؤثر f و B تقابل المؤثر g عندئذٍ:

$\underset{\text{الواحدية}}{A.B = I} \iff f \circ g = \underset{\text{المطابقة}}{I} \implies f$ متباين $\implies f$ مؤثر خطي $\implies$ تقابل

g غامر $\implies$ وتقابل عكسي لـ f وحيد

إذاً أن A قلوبة ومقلوبها B.

Finished Lecture ...

ALADIB.net