المحاضرة الخامسة..

الأحد 2015/3/29

تمرين:

في فضاء احتمالي $(\Omega, \mathcal{P}, P)$ لدينا الأحداث التالية A_1, A_2, A_3 التي سنفترض أنها مستقلة عنوانياً، احسب $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ ، $P(A_1 \cup A_2)$.

علماً أنّ: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$

الحل:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}$$

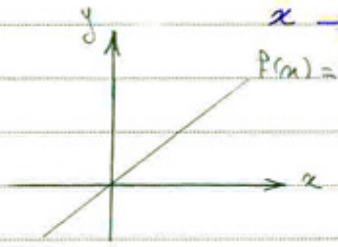
حيث: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ لأنها مستقلة عنوانياً.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

أعد التمرين نفسه من أجل 4 أحداث مستقلة عنوانياً.

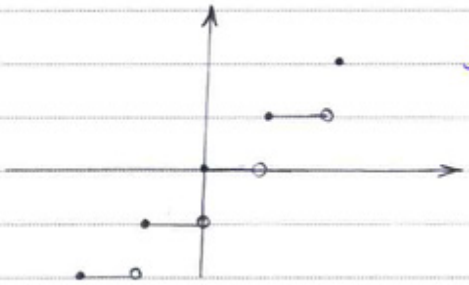
ملحق بالتمرين 5 / 62

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to F(x) = x$$



مثال عن تابع متزايد ومستمر

$f(x) = [x]$



مثال على تابع متزايد وغير مستمر
(مستمر من اليمين)

إذا كان لدينا $(X=\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mu)$ فضاء مقيس، لنعرف التابع:

$$F(x) = \mu(]-\infty, x])$$

إنّ هذا التابع متزايد لأنّ:

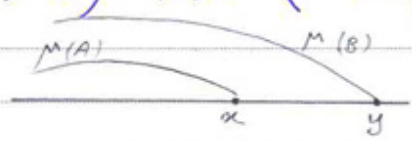
إذا أخذنا $x, y \in \mathbb{R}$ حيث $x < y$ فإنّ:

$$F(x) = \mu(A) \leq F(y) = \mu(B)$$

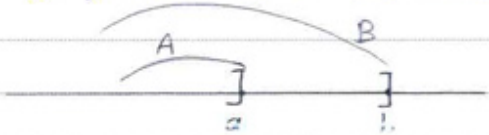
حيث: $A =]-\infty, x]$

$B =]-\infty, y]$

$A \subseteq B$



$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$$



$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$
$$= F(b) - F(a)$$

نسمي هذا التابع تابع توزيع مرتبط بالقياس μ فيه موجبة وهو متزايد.
وقياسه أي مجال يعطى بـ $F(b) - F(a)$
من الشكل $]a,b]$

للاطلاع. التمرين 5 / 62:

إذا كان $J = \{[a,b[: a \leq b, a,b \in \mathbb{R}\}$
وكان F تابعاً مستمراً ومتزايداً أيّاً على $\mathbb{R}$ ومحدوداً عليها إذا وضعنا: $\lambda_F([a,b[) = F(b) - F(a)$

فأثبت أنّ:

أ- $\lambda(\phi) = 0$

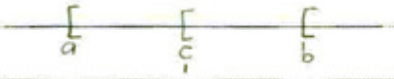
ب- $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n[= [a,b[\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([a_n,b_n[) = \lambda([a,b[)$

هيث الرمز ⊔ يعني اتحاداً منفصلاً. هل λ قياس على $\mathcal{J}$؟

الحل:

نأخذ $a=b$

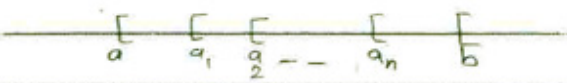
$$\lambda([a,a]) = \lambda(\phi) = F(a) - F(a) = 0$$



$$\lambda([a,b[) = \lambda([a,c_1[\cup [c_1,b[) = \lambda([a,c_1[) + \lambda([c_1,b[)$$
$$= F(c_1) - F(a) + F(b) - F(c_1) = F(b) - F(a)$$

$$\lambda([a,b[) = \lambda([a,c_1[\cup [c_1,c_2[\cup [c_2,b[) = F(c_1) - F(a) + F(c_2) - F(c_1)$$
$$+ F(b) - F(c_2) = F(b) - F(a)$$

إذا كان لدينا:



$$[a,b[= \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n[$$

$$\lambda([a,b[) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([a_n,b_n[)$$

نستخدم مبرهنة هاهن بوريل.

λ تحترم الخالية وجمعي عدّاً $\Leftarrow$ λ قياس على $\mathcal{J}$.

وبالتالي تكون المبرهنة الأساسية:

إنّ كل تابع مستمر ومتزايد ومحدود على $\mathbb{R}$ يولد قياساً على صف المجالات

$J = \{ [a,b[: a \leq b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \}$.

المعرّف كما يلي : $\lambda([a,b[) = F(b) - F(a)$.

إنّ القياس هنا عرفناه على صف المجالات $J = \{ [a,b[: a \leq b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \}$

وهذا الصف يولد حيز بوريل $\sigma(J) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

(كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ يمكن كتابتها على شكل اتحاد عدود ومنفصل لمجالات من النمط $[a,b[$).

θ مفتوحة $= \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n[$

سنضع :

$$\lambda(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([a_n, b_n[) = \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n))$$

إذا أخذنا مجموعة E بوريلية كيفية ، أعرّف قياسها على الشكل التالي :

$$\lambda(E) = \inf \{ \lambda(\theta) : \theta \text{ مفتوحة} \supseteq E \}$$

ويمكن أن نبرهن أنّ :

$$\lambda(E) = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) : \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n[\supseteq E \}$$

وليس هذا القياس قياس لوبغ - استيلجس على $\mathbb{R}$.

إذاً وجدنا أنّ قياس لوبغ - استيلجس على المجالات نوعه أشبه من اليمين أو من اليسار والمعرف بدلالة دالة F مستمرة ومتزايدة تعين كما يلي :

بالتدريج

1- $\lambda_F([a,b[) = F(b) - F(a)$

2- $\lambda_F(\theta) = \lambda_F(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n[) = \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n))$ (θ مفتوحة)

3- $\lambda_F(E) = \inf \{ \lambda_F(\theta) : \theta \supseteq E \}$; E بوريلية

4- $\lambda_F(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[F(b_n)-F(a_n)] : \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n[\supseteq E\right\}$ أو

حالة خاصة: إذا كان $F(x)=x$ إنطابق مستمر ومتزايد تماماً فنجد:

1- $\lambda_F([a,b[) = \lambda([a,b[) = b-a$ يقيس كل مجال بطوله

2- $\lambda_F(\Theta) = \lambda(\Theta) = \lambda\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n[\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$

3- $\lambda_F(E) = \inf\{\lambda(\Theta) : \Theta \supseteq E\}$

4- $\lambda_F(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n[\supseteq E\right\}$ أو

ص ٧٠ مبرهنة:

إذا كانت f و g قيوسيتين فإنّ $\min(f,g)$ قيوسة.

لنرمز بـ $\mathcal{L}^0$ لمجموعة الدوال القيوسة.

$$f,g \in \mathcal{L}^0(X \to \mathbb{R}) = \mathcal{L}^0(X)$$

فإنّ $h = \min(f,g) \in \mathcal{L}^0(X)$

البرهان:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad A = \{x : \min(f,g)(x) \geqslant \alpha\}$$

$$= \{x : h(x) = \min(f(x), g(x)) \geqslant \alpha\}$$

$$= \{x : f(x) \geqslant \alpha\} \cap \{x : g(x) \geqslant \alpha\}$$

$$= f^{-1}([\alpha,+\infty[) \cap g^{-1}([\alpha,+\infty[)$$

ولدينا f و g قيوسيتين وبالتالي f^{-1} و g^{-1} قيوسة وتقاطع مجموعتين قيوسيتين هو مجموعة قيوسة أي h تطبيق قيوس.

نفس الطريقة بالنسبة لـ $\max(f,g)$.

إذا كانت $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in \mathcal{L}^0$ متتالية من الدوال القياسية

$h = \inf_{n \geq 1} f_n$ قياسي $\quad h(x) = \inf_{n \geq 1} f_n(x)$

$K = \sup_{n \geq 1} f_n$ قياسي $\quad K(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$

$$A = \{x : \sup_{n \geq 1} f_n(x) \leq \alpha\}$$

$$= \{x : f_n(x) \leq \alpha \ , \ \forall n\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \leq \alpha\}$$

التقاطع لعدد لمجموعات قياسية هي مجموعة قياسية .

انتهت المحاضرة ..