المحاضرة العاشرة

المعادلات الذاتية لحركة نقطة مادية على منحني:

لنفرض أن النقطة المادية تتحرك على منحني لا يتغير مع مرور الزمن

نأخذ المحاور الذاتية $\vec{t}_{تاو}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$

هذه الجملة متحركة

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على هذا المنحني ولنوجد معادلات الحركة.

من قانون التحريك الأساسي:

$$\underset{\text{رد الفعل}}{\vec{N}} + \vec{F} = m.\vec{\Gamma} \quad (1)$$

نأخذ مساقط هذه المعادلة على المحاور الذاتية.

نعلم أن: $\vec{v} = v.\vec{\tau}_{تاو}$

((شعاع السرعة محمول على المماس))

وبالتالي لنوجد التسارع نأخذ

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}_{تاو} + v\frac{d\vec{\tau}_{تاو}}{dt}$$

لدينا:

$$\boxed{\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dt}{d\theta} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}}$$

حيث $d\theta$ تغير زاوية مو سس المسار خلال الفترة الزمنية dt

ds هو تغير طول المسار خلال الفترة السابقة dt

ومنه فإن. $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$

ρ نصف قطر التقوس

$$\frac{ds}{dt} = v \quad , \quad \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$$

شعاع الواحدة على ناظم المنحني

نعوض في العلاقة السابقة يصبح لدينا:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\frac{m\,d\vec{v}}{dt} = m\cdot\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{n}$$

نعوض في العلاقة (1)

$$m\cdot\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{n} = \vec{F} + \vec{N}$$

نسقط

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n \\ 0 &= F_b + N_b \end{aligned}\right\}$$

معادلات حركة نقطة مادية على منحني

نظرية الطاقة الحركية لنقطة مقيدة :

يمكن دراسة حركة النقطة المادية المقيدة كـ نقطة طليقة فيما إذا اعتبرنا أن هناك قوى أخرى غير القوة الخارجية مطبقة على هذه النقطة وبالتالي يمكن أن نطبق جميع نظريات التحريك التي طبقت على حركة النقطة الطليقة وبالتالي نطبقها على النقطة المقيدة.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr + \lambda_1 \cdot \text{grad}\, f_1 + \lambda_2\, \text{grad}\, f_2$$

$$\text{grad}\, f \cdot dr = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$$

ومن معادلة السطح : $f(x, y, z, t) = 0$

تفاضل هذه العلاقة :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

ومنه :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}_{\text{تدرج } f} + \frac{\partial f}{\partial z} dz = -\frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr - \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t} dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} dt$$

الطاقة الحركية للنقطة المادية المقيدة على منحنى ناشئ من تقاطع سطحين (يتغير مع مرور الزمن)

ملاحظة: إذا كان الارتباط لا يتعلق بالزمن بشكل مباشر

يصبح عندنا :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr} \quad ★$$

النقطة الطليقة

من العلاقة (★) نكامل :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

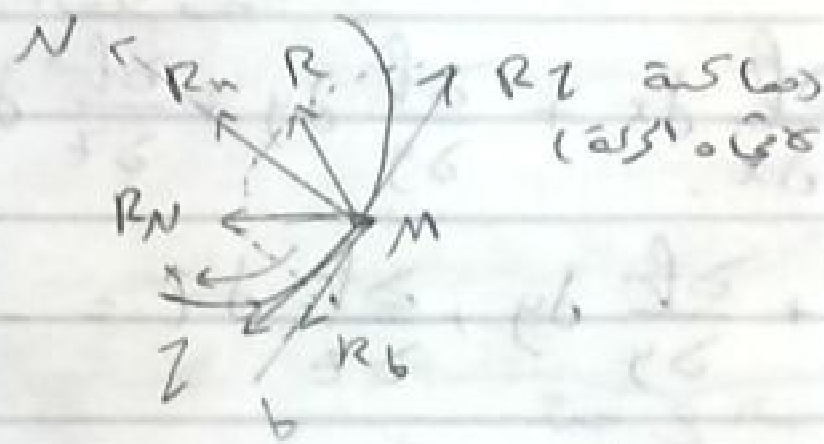
العمل (دفع القوى المؤثرة على النقطة المادية)

وإذا كانت القوى المؤثرة كمونية

نصبح لدينا : $F \cdot dr = du = -dv$

$\boxed{\frac{mv^2}{2} + v = h}$ أو $\boxed{\frac{mv^2}{2} - u = h}$

حركة نقطة مادية بوجود احتكاك :



عند دراسة حركة نقطة مادية على منحني ثابت فإن رد الفعل لن يكون ناظمياً على المنحني أي أن رد الفعل يصنع مع المستوي الناظمي زاوية تدعى بزاوية الاحتكاك وبذلك يكون لرد الفعل مركبة مماسية نرمز لها بـ R_τ موجودة في المستوي الناظمي ومركبة أخرى R_N يمكن تفريقها إلى مركبتين R_n ، R_b حيث:

R_n محمولة على الناظم الأساسي

R_b " " ثاني الناظم

وبالتالي من قانون التحريك :

$$\left.\begin{aligned} m\vec{\Gamma} &= \vec{F} + \vec{R} \\ m\frac{dv}{dt} &= F_\tau + R_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n \\ 0 &= F_b + R_b \end{aligned}\right\}$$

لأن R_t معاكسة لاتجاه الحركة وبالتالي $R_t = f\,|R_N|$

حيث f عامل الاحتكاك

ومنه: $R = R_n + R_b$

حيث: $\left\{ \begin{array}{l} R_n = m\dfrac{v^2}{\rho} - F_n \\ R_b = -f_b \end{array} \right.$

وبالتالي:

$$|R_N| = \sqrt{R_n^2 + R_b^2} = \sqrt{\left(m\frac{v^2}{\rho} - F_n\right)^2 + f_b^2}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_t - f\sqrt{\left(m\dfrac{v^2}{\rho} - F_n\right)^2 + f_b^2} & (1 \\ (2)\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + R_n\ ,\quad (3\quad 0 = F_b + R_b \end{cases}$$

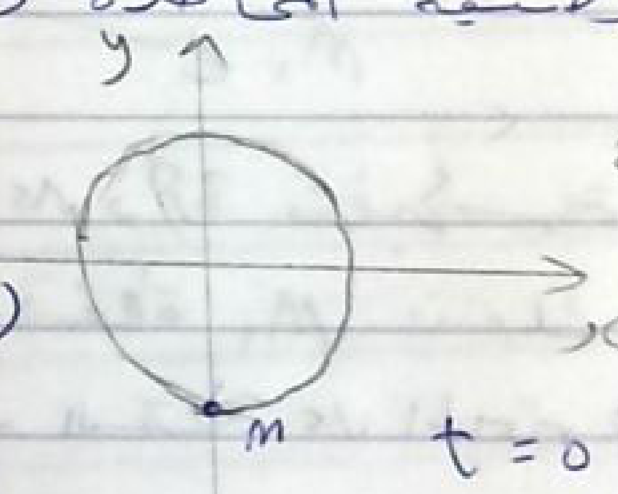
الحركة تعاكس الاتجاه لذلك كتبنا ناقص

معادلة الحركة لنقطة مادية بوجود احتكاك

إذا كانت الحركة تتم بالمستوي يكون $R_b = 0$

فالمعادلة (3) تلغى

حل الوظيفة المحاضرة 9



الحركة على y

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mg\,dy$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg(y - y_0)$$

$t = 0\ ,\ y_0 = -a$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2g(y + a)}$$ العلاقة تعطينا الحركة

رد الفعل :

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n$$

$\rho = a$ قطر الدائرة

$$m\frac{v^2}{a} = mg\sin\theta + R$$

وبالتالي

$$R = m\frac{v^2}{a} - mg\sin\theta \quad **$$

نعوض في **

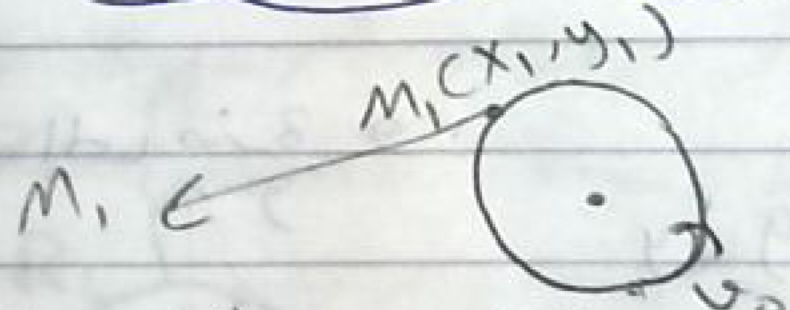
$$R = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2ga) - mg\sin\theta$$

ومنه نجد $y = a\sin\theta$

$$R = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2ga) - \frac{mgy}{a}$$

$$\boxed{R = (v_0^2 - 3gy - 2ga)}$$ رد الفعل

انفكاك النقطة عن الدائرة :



m تتحرك على دائرة بسرعة ابتدائية

مثلاً عند وصولها لنقطة M_1 تنفلت

شرط انفكاك النقطة عن المنحنى هو $R = 0$
رد الفعل

$$v^2 - 3gy - 2ga = 0$$

نوجد احداثيات النقطة M_1

$$\boxed{y_1 = \frac{v_0^2 - 2ga}{3g}} \quad , \quad x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$\boxed{x_1 = \sqrt{a^2 - y_1^2}}$$

نأخذ العلاقة

$$-a < \frac{v_0^2 - 2ga}{3g} < a$$

مهمة للامتحان نناقش الحالات

تكملة على الطالب