تعريف: بفرض $f(z)$ تابع عقدي معرف على D، عندئذ نقول عن $f(z)$ أنه محدود على D إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists M>0 : \forall z\in D : |f(z)|\leq M$$

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع عقدي تحليلي على المنطقة D
وبفرض γ منحني دائرة واقعة تماماً في المنطقة D
من الشكل $\gamma(t) = re^{it}+a : t\in[0,2\pi]$
وبفرض $f(z)$ تابع محدود على D أي

$$\exists M>0 : \forall z\in D : |f(z)|\leq M$$

عندئذ:

$$\forall n\in N : |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M\cdot n!}{r^n}$$

الإثبات: لدينا حسب صيغة كوشي التكاملية

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

ومنه

$$|f^{(n)}(a)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right|\cdot\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\left(\frac{M}{r^{n+1}}\right)(2\pi r) = \frac{M\cdot n!}{r^n}$$

حيث

$$\forall z\in\gamma : \left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$$

لأن:
$|f(z)|\leq M$
بما أن: $|(z-a)^{n+1}| = |(re^{it}+a-a)^{n+1}| = |(re^{it})^{n+1}|$
وبما أن $|e^{it}|=1 : \forall t\in[0,2\pi]$ فيكون

$$\frac{1}{|(z-a)^{n+1}|} = \frac{1}{r^{n+1}}$$

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع عقدي تحليلي ومحدود على $\mathbb{C}$ عندئذ $f(z)=c$
حيث c ثابت عقدي

الإثبات: لنضع $\gamma(t)=re^{it}+z \; : t\in[0,2\pi]$
معنى دائرة مركزها z اختياري من $\mathbb{C}$ وكذلك نصف قطرها r اختياري
عندئذ حسب مبرهنة $\forall z\in\mathbb{C} : |f'(z)|\leq \frac{M}{r}$

بما أن $f(z)$ تحليلي على $\mathbb{C}$ ونجعل $r\longrightarrow\infty$ فيكون
$\forall z\in\mathbb{C} : |f'(z)|\leq 0$
أي أن $|f'(z)|=0$
أي $f'(z)=0$ ومنه $f(z)=0$

#

المبرهنة الأساسية في الجبر:

بفرض $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0$ كثير حدود من الدرجة n
في $\mathbb{C}[z]$ حيث $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$ عندئذ يوجد للمعادلة
$f(z)=0$ n جذر في $\mathbb{C}$ كما يمكن كتابة $f(z)$ على الشكل
$f(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$

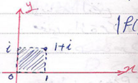
الإثبات: نفرض أنه لا يوجد جذور لـ $f(z)$ في $\mathbb{C}$ وبالتالي
التابع $F(z)=\frac{1}{f(z)}$ تحليلي على $\mathbb{C}$ كذلك $|F(z)|=\frac{1}{|f(z)|}$

$$=\frac{1}{|z|^n\cdot\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right|}\xrightarrow[z\to\infty]{}0$$

وهذا تناقض
ومنه $F(z)$ محدود على $\mathbb{C}$ وبالتالي حسب مبرهنة $F(z)=c_1$
أي $f(z)=c$ وهذا يناقض الفرض ومنه يوجد جذر لـ $f(z)$
وليكن z_1 وبالتالي يمكن كتابة $f(z)=(z-z_1)f_1(z)$
حيث $f_1(z)$ كثير حدود من الدرجة $n-1$
فإذا كانت $n-1\geq 1$ نكرر العملية السابقة حتى نحصل على
$f(z)=a_n(z-z_1)\cdots\cdots(z-z_n)$

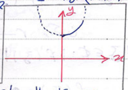
#

تمرين: ليكن $f(z)=\sin z$ تابع عقدي معرف على المنطقة
$D=\{z\in\mathbb{C} : 0<Re(z)<1 , 0<Im(z)<1\}$ أثبت أن $f(z)$ محدود على D



الحل
نلاحظ أن
$$|f(z)| = |\sin z| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right|$$
$$\leq \frac{|e^{iz}|+|e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = ch\, y < ch(1)$$

ومنه التابع محدود على $\mathbb{C}$



رسم تابع الـ ch

ملاحظة: نلاحظ أن $f(z)=\sin z$ غير محدود على $\mathbb{C}$
لأن $f(z)=\sin z$ تحليلي على $\mathbb{C}$ وليس بتابع ثابت.

وظيفة: بفرض $f(z)=z^2 e^{z}$ تابع عقدي معرف على $D(0,1)$
أثبت أن $f(z)$ محدود على $D(0,1)$

انتهت المحاضرة السادسة