الأحد 2015/3/29

المحاضرة السادسة

تعريف:

١. ليكن K حقل ما و F حقل جزئي في K و $f(x)\in F[x]$

نقول r جذر مكرر m مرة للحدودية $f(x)$ إذا وفقط إذا $\longleftrightarrow$:

$(x-r)^m \mid f(x)$ يقسم و $(x-r)^{m+1} \nmid f(x)$ (لا يقسم)

٢. r جذر مضاعف للحدودية $f(x)$ إذا كانت $m\geq 2$

٣. r جذر بسيط للحدودية $f(x)$ إذا كانت $m=1$

مثال (1):

إذا كانت الحدودية $f(x)=x^3-7x^2+15x-9\in\mathbb{Q}[x]$

$x=3\in\mathbb{Q}$ جذر مكرر مرتين لأنه

$(x-3)^2 \mid f(x)$ يقسم و $(x-3)^3 \nmid f(x)$ لا يقسم

كما أنه $x=1\in\mathbb{Q}$ جذر بسيط

$f(x)=(x-1)(x-3)^2$

مثال (2):

إذا كانت الحدودية $f(x)=x^5+3x^4+x^3-3x^2-6x-2$ في $\mathbb{Q}[x]$

$x=-1\in\mathbb{R}$ جذر مكرر 3 مرات

$x=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ جذر بسيط

ملاحظة:

١. لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\in F[x]$ فإن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x)=\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$

٢. $\mathbb{Q}$ حقل جزئي من $\mathbb{R}$ ، $x=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ هو جذر الحدودية $f(x)=x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$ في $\mathbb{R}$

حيث $f(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

جميع جذورها بـ k وليس F $\qquad r\in k$

مبرهنة:

لتكن k حقل ممتد F حقل جزئي من k و $r\in k$ جذر مضاعف لكثيرة الحدود (متعددة الحدود)

$0 \neq f(x) \in F[x]$ إذا تحقق $f'(r)=0$

الإثبات:

$f(x) = (x-r)g(x)$ حيث $g(x)\in k[x]$

$f'(x) = g(x) + (x-r)g'(x)$

$\Leftarrow \quad f'(r) = g(r) = 0$

وهو يعني أن r جذر لـ $g(x)$ أي يمكن كتابة $g(x)$ بالشكل:

$g(x) = (x-r)h(x)$ حيث $h(x)\in k[x]$

$f(x) = (x-r)^2 h(x)$

تعريف:

إذا كانت R حلقة تبديلية واحدية بينت فيما إذا كان التالي صحيح:

1- $Char(R) = Char(R[x])$

نتيجة (1):

لتكن k حقل ما و F حقل جزئي من k

ولتكن $f(x)\in F[x]$ غير قابلة للاختزال.

1- إذا كان $Char(F)=0$ فإنه لا يوجد جذور مكررة لـ $f(x)$

نتيجة (2):

إذا كان $Char(F)=p$ وكان $r\in k$ جذر مكرر لـ $f(x)$ ، p عدد أولي

فإن $f'(x) \neq g(x^p)$ حيث $g(x^p)\in F[x]$

أو $f(x) = g(x^p)$

1-

$$f(x) = a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in F[x]$$

حيث غير قابلة للاختزال وليكن r جذراً مضاعفاً للحدودية $f(x)$

حسب مبرهنة سابقة

$(x-r)$ هو عامل مشترك بين $f(x)$ و $f'(x)$

$$n-1 = \deg(f') < \deg(f) = n.$$

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} = 0 \qquad Char(F) = 0.$$

$$i a_i = 0 \qquad i \in [1, \dots, n]$$

$$a_i = 0 \qquad i \in [1, 2, \dots, n]$$

$$f(x) = a_0 = a_0 + \underbrace{a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\text{اصفار}}$$

ومنه $f(x)$ ليس لها جذور

2-

$$\exists i \in [0, 1, \dots, n] \quad p \mid i$$

$$i = p \cdot t \qquad ; p, t \in \mathbb{Z}$$

$$i a_i = (t p) a_i = t (p a_i) = t \cdot 0 = 0.$$

إذا ضربنا $Char(F)$ بأي عنصر سيكون صفر.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$f(x) = a_0.$$

$$f'(x) \neq g(x^p)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$(p$ لا يقسم $i)$ $p \nmid i$

تنبيه:

لنكن F حقل منته K حقل جزئي من F ومميز F هو p $Char(F) = p$ هو عدد أولي

ولكن $n \in \mathbb{Z}^*$ فإن الحدودية $f(x) = x^{p^n} - x$ لها جذور مختلفة

الاثبات:

$f'(x) = p^n x^{p^n-1} - 1$

ليكن r جذر للمشتقة $f'(x)$

$Char(F) = p \qquad p \cdot x = 0$

$f'(x) = 0 - 1 = -1$

$f'(x)$ لا يمكن ان ينعدم فإن $f(x)$ ليس لها جذور مضاعفة كل جذورها بسيطة.

تمارين:

1- لتكن $\mathbb{R}$ هي Id و $\epsilon : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ تطبيق

$\epsilon(f(x)) = f(-x)$

$x \longrightarrow -x$ اثبت ان ϵ تماثل حلقي؟

2- إذا كان F حقل فاثبت ان $\epsilon : F[x] \longrightarrow F[x]$

$0 \neq a \in F$ ، $\epsilon(f(x)) = f(ax)$ اثبت ان ϵ تماثل حلقي؟

3- إذا كانت R واحدية تبديلية كان

$\epsilon : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$r \in \mathbb{R}$ ، $\epsilon(f(x)) = f(r)$ اثبت ان ϵ تشاكل حلقي.

4- إذا كان $\epsilon : Q[x] \longrightarrow Q(\sqrt{2})$

$\epsilon(f(x)) = f(\sqrt{2})$ بين فيما إذا كان ϵ تماثل حلقي؟