المحاضرة الحادية عشرة ..

الإثنين 2015/4/20 ..

تمهيدية (استمرار الجداء الداخلي):

إذا كان $x_n \to x$ و $y_n \to y$ في فضاء جداء داخلي، فإنّ

$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

شرح: إذا كانت $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ فإنّ دالة الجداء الداخلي تكون مستمرة. الفضاء فضاء جداء داخلي وبالتالي هو فضاء منظم وبالتالي هو فضاء متري، في الفضاء المتري نستخدم المتتاليات لإثبات الاستمرار نأخذ متتالية من المنطلق تسعى إلى نقطة في المنطلق والمنطلق هنا هو $X \times X$ لذلك المتتالية ستكون $(x_n, y_n) \to (x, y)$، إذن $x_n \to x$ و $y_n \to y$ حيث أنّ الفضاء $X \times X$ منتهي البعد.

لنبرهن أنّ صورة المتتالية (x_n, y_n) تسعى إلى صورة (x, y) وفق الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$ في الفضاء K أي أنّ الحقل هو $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$ لذلك سنستخدم القيمة المطلقة.

البرهان:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$$

$$= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle|$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|$$

حسب كوشي شفارتز:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to 0$$

وذلك لأنّ:

$x_n \to x$ أي أن $\|x_n - x\| \to 0$

و $y_n \to y$ أي أنّ $\|y_n - y\| \to 0$

وإن كلاً من $\|y\|$ و $\|x_n\|$ محدود.

وبالتالي: $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ وبالتالي $\langle \cdot,\cdot\rangle$ هي دالة مستمرة.

مبرهنة (الإتمام): نصاً فقط

يوجد لأي فضاء جداء داخلي X فضاء هلبرت وايزومورفيزم A من X على فضاء جزئي كثيف W في H. إنّ الفضاء H وحيد إذا ما استثنينا الايزومورفيزمات.

مبرهنة (الفضاء الجزئي):

ليكن Y فضاء جزئياً من فضاء هلبرت H عندئذ تصح الدعاوى التالية:

أ- الشرط اللازم والكافي كي يكون Y تاماً هو أن يكون مغلقاً في H.

ب- إذا كان Y منتهي البعد، فإنه تام.

ج- إذا كان H فصولاً فإن Y يكون كذلك وبوجه أعم فإنّ كل مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي فصول فصولة.

فكرة البرهان:

أ- برهنت في الفضاءات المترية التامة صفحة ٣٩.

(فضاء هلبرت هو فضاء متري تام).

ب - مبرهنة سابقة:

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X يكون تام وبوجه خاص كل فضاء منظم منتهي البعد يكون تام.

"كل فضاء جزئي من فضاء متجهي هو فضاء متجهي"

إن مقصور الجداء الداخلي على الفضاء هو جداء داخلي وبالتالي هو فضاء منظم وبالتالي تصح المبرهنة السابقة.

ج - نقول عن فضاء إنه فصول إذا وجدت مجموعة معدودة وكثيفة فيه وبالتالي إذا كان فصول فإن المجموعات الجزئية تكون فصولة.

المتممات المتعامدة:

تعرف المسافة بين عنصر x في فضاء متري X ومجموعة جزئية غير خالية M في X بأنها:

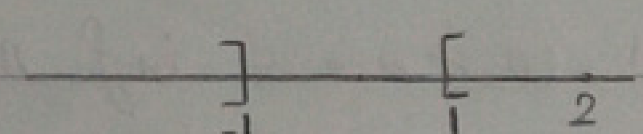
$$d(x,M)=\inf_{y\in M} d(x,y) \geq 0$$

إن $\inf d(x,y)$ موجود دوماً لأن كل مجموعة محدودة من الأدنى وغير خالية من $\mathbb{R}$ يوجد لها $\inf$ حيث أن $\mathbb{R}$ تتمتع بخاصة أكبر حد أدنى وأصغر حد أعلى.

والسؤال هنا:

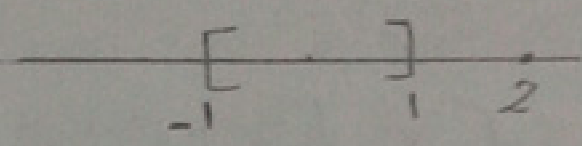
هل يوجد عنصر من عناصر M يعطي هذا البعد.

مثلاً:



بعد النقطة 2 عن المجموعة $]-1,1[$ هو 1 ولكن لا يوجد نقطة من المجموعة $]-1,1[$ تحقق هذا البعد

بينما



فإنه يوجد عنصر يحقق البعد وهو 1.

سندرس فيما إذا كان يوجد عنصر y من M بحيث يكون أقرب ما يكون إلى النقطة x في مبرهنة المتجه المصغر (سندرس وجوده ووحدانيته)

ملاحظة:

لتكن X مجموعة ما ولنضع $\alpha = \inf X$

فهل يوجد علاقة بين المتتاليات في X والـ inf ؟

أي هل نستطيع أن نبني متتالية تسعى إلى inf ؟

نعم. هناك متتالية من عناصر المجموعة X تسعى إلى inf

وذلك حسب تعريف inf :

$\alpha = \inf X$:

$$\text{I) } x \in X : x \geq \alpha$$

$$\text{II) } \varepsilon > 0 \; ; \; \exists\, \bar{x} \in X : \bar{x} < \alpha + \varepsilon$$

لنفترض $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \exists\, \bar{x} \in X : \bar{x} < \alpha + \frac{1}{n}$$

إن المتتالية $\alpha + \frac{1}{n}$ تسعى للـ $\inf = \alpha$ وندعو هذه المتتالية بالمتتالية الأصغرية ويوجد أكثر من متتالية تسعى للـ α وجميعها ندعوها بالمتتاليات الأصغرية (سميت بذلك لأنها تسعى للـ inf).

تعريف (1) :

القطعة المستقيمة الواصلة بين x و y في فضاء متجهي :

مجموعة كل العناصر z من X التي تحقق :

$$z = \alpha x + (1-\alpha) y$$

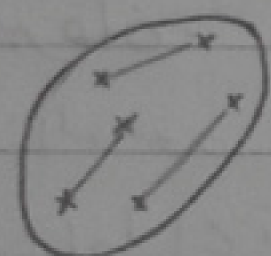
$$0 \leq \alpha \leq 1$$

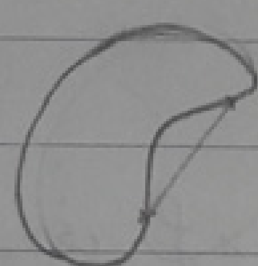
تعريف (2) :

المجموعة المحدبة :

نقول عن مجموعة جزئية M من X إنها محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M.

مجموعة محدبة





مجموعة غير محدبة

انتهت المحاضرة ..