المحاضرة (١٠):　　　　　　　　　　　　　　الاثنين: 2015/4/20

مبرهنة:

لتكن R منطقة صحيحة (تكاملية) Id و $f(x)\in R[x]$ ، إذا كانت $r_1,r_2,\dots,r_n\in R$ جذور مختلفة للحدودية في R فإن: $\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)$ يقسم $f(x)$

البرهان:

يتم الإثبات بالاستقراء الرياضي على n (عدد الجذور)

من أجل $\boxed{n=1}$ تكون المبرهنة صحيحة حسب النتيجة السابقة. (آخر نتيجة من المبرهنة السابقة)

من أجل $\boxed{n=k}$ نفرض صحة المبرهنة من أجل $n=k$

$f(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-r_i)\,g(x)$ و $\exists g(x)\in R[x]$ (أي الجداء من أجل k جذر يقسم $f(x)$)

من أجل $\boxed{n=k+1}$

لنبرهن صحة المبرهنة من أجل $n=k+1$

نلاحظ أن: أصفار (جذور) $g(x)$ هي جذور لـ $f(x)$

أي أن إذا كان r_{k+1} جذراً لـ $g(x)$ فإنه تحقق $g(r_{k+1})=0$

فيكون $f(r_{k+1})=0$.

وذلك لأن: $f(r_{k+1})=\prod_{i=1}^{k}(r_{k+1}-r_i)\,g(r_{k+1})=0$ حسب الفرض الاستقرائي

ولأنها Id

★ r_{k+1} جذراً لـ $g(x)$ فإن $h(x)\in F[x]$

$g(x)=(x-r_{k+1})$

$f(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-r_i)(x-r_{k+1})\,h(x)$

$=\prod_{i=1}^{k+1}(x-r_i)\,h(x).$

هذه المبرهنة ما هي إلا تعميم للنتيجة الأخيرة من المحاضرة السابقة من أجل n جذر

تم المطلوب ومنه:

القضية صحيحة من أجل $n=k+1$ وبالتالي $f(x)$ قابلة للقسمة على الجداء $\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)$.

وبالتالي تكون المبرهنة صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب n

نتيجة (1):

إذا كانت IR منطقة تكاملية Id و $f(x) \in IR[x]$ و $\deg f(x) = n$

فإن: للحدودية $f(x)$ n من الجذور على الأكثر في IR

الإثبات:

يتم الإثبات بالاستقراء الرياضي على درجة $f(x) = n$

من أجل $\boxed{n=1}$ $f(x) = ax + b$ $a, b \in IR$

a قابل للقلب في IR. فإن $r = -ba^{-1}$ جذر

ومنه تم المطلوب

من أجل $\boxed{n \neq \deg}$ نفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل كل الحدوديات التي درجتها أصغر من n

من أجل $\boxed{n = \deg}$

ولنبرهن صحتها لأجل كل الحدوديات التي درجتها n

* - إذا كانت r جذر لـ $f(x)$ حسب المبرهنة السابقة f قابل للتحليل

أي f قابلة القسمة على $(x-r)$

$$f(x) = (x-r)g(x)$$

حيث: $g(x) \in IR[x]$ $\deg(g(x)) < n$

حسب الفرض الاستقرائي: $g(x)$ تملك $n-1$ جذر على الأكثر.

وبالتالي $f(x)$ تملك n من الجذور على الأكثر في IR.

من المبرهنة السابقة.

في هذه الحالة حتى لو ما كانت a لها مقلوب فلن يكون هناك حل وبذلك تكون المبرهنة من أجل $n=1$ صحيحة لأنها يجب أن تملك صفراً واحداً على الأكثر أي يمكن أن لا تملك صفراً.

نتيجة (2):

إذا كانت IR منطقة صحيحة Id غير منتهية (حتى أفهم نوما في حل $\neq 0$)

و $f(x) \in IR[x]$ تكون حدودية صفرية $f(x) = 0$

إذا: $\forall r \in IR$ $f(r) = 0$

البرهان:

نفرض جدلاً:

$\deg(f(x)) = n$ وبالتالي يوجد n جذر على الأكثر وليكن أحد هذه الجذور $a \in R$

ويحقق $f(a) \neq 0$. وهذا يناقض كون a جذر لـ $f(x)$

نتيجة (٣):

إذا كانت R منطقة تكاملية غير منتهية، $f(x), g(x) \in R[x]$

$f(x) = g(x)$ إذا تحقق $\forall r \in R : f(r) = g(r)$

البرهان:

لنكن $h(x) = f(x) - g(x) \in R[x]$

وهي تحقق: $h(r) = f(r) - g(r) \quad \forall r \in R$

حسب الفرض $h(x) = 0 \quad \forall r \in R$

ومنه: $f(x) = g(x)$

ملاحظة:

تم افتراض ان R Id لأنه إذا لم تكن كذلك لن يكون لـ $f(x)$ n جذر على الأكثر.

مثال: $f(x) = x^3 + 3x + 2 \in Z_6$

فإن $1, 2, 4, 5$ جذور لهذه المعادلة

وعدد الجذور أكبر من درجة $f(x)$.

ملاحظة:

$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ فإن $f(x)$ قابل للتحليل على $\mathbb{C}$ $\leftrightarrow$ إذا كانت درجتها أكبر أو تساوي 2

ولها حل إذا كانت درجتها أكبر أو تساوي 1

- $f(x)$ دائماً تملك أصفاراً في $\mathbb{C}$ ولكن ليس دائماً قابلة للتحليل على $\mathbb{C}$

(z) جذر لـ $f(x)$

مبرهنة:

اذا كان $z\in\mathbb{C}$ (حيث z عدد عقدي) $f(x)$ حدودية فإن مرافق z وهو $\bar{z}$ يكون جذر لـ $f(x)$

الإثبات:

لتكن $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ عندئذٍ $0=f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ فرضاً.

$0=\overline{f(z)}=\overline{\sum_{i=1}^{n} a_i z^i}=\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{z}^i$ حسب التشاكل والتشاكل القرين

مرافق المجموع = مجموع المرافقات.

وبالتالي يكون $\bar{z}$ جذراً لـ $f(x)$.

- اذا كانت $f(x)$ تحقق $\deg f(x)=n$ عدد فردي *

فإنه يوجد جذر حقيقي واحد على الأقل لـ $f(x)$

حسب المبرهنة الأساسية في الجبر (من أهم المبرهنات على الإطلاق): يوجد لـ $f(x)$ n جذر في $\mathbb{C}$

(أي عددها = عدد فردي)

البرهان: ليكن z عدد عقدي $f(z)=0$ حسب المبرهنة السابقة يكون $\bar{z}$ جذر لـ $f(x)$.

وبالتالي يمكن الترتيب على شكل أزواج كل جذر مع مرافقه

n: عدد فردي وبالتالي أكيد يوجد جذر حقيقي.

تعريف:

ليكن R منطقة صحيحة Id و $0\neq f(x), g(x)\in R[x]$

نعرف القاسم المشترك الأعظم $d(x)\in R[x]$

بأنه تحقق:

1) $d(x)\mid f(x)$ 2) $d(x)\mid g(x)$

← اذا وجدت $c(x)\in R[x]$ تحقق: $c(x)\mid f(x)$ و

$c(x)\mid g(x)$

فإن: $c(x) \mid d(x)$

ونرمز له بـ $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$

أمثلة:

$f(x) = x^3+1 \in \mathbb{Z}[x]$ ، $g(x) = x^2-1 \in \mathbb{Z}[x]$

$\gcd(f(x), g(x)) = (x+1)$

مبرهنة:

لتكن $\mathbb{R}$ حقلة ، $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ حدوديتين غير صفريتين

عندئذ: $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$

$\exists\, s(x), t(x) \in \mathbb{R}[x]$ تحققان:

$d(x) = s(x) f(x) + t(x) g(x)$

البرهان (غير مطلوب)

ملاحظة:

نقول ان حدوديتان انهما اوليتان فيما بينهما اذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما = 1

ملحوظة:

1) إذا كانت R ليست منطقة صحيحة، فإن النتيجة (1) السابقة ليست صحيحة، كما يوضح المثال التالي.

لتكن $f(x)=x^2+3x+2\in \mathbb{Z}_6[x]$ حدودية معرفة على حلقة البواقي بالمقاس 6. إذن $\mathbb{Z}_6$ ليست منطقة صحيحة وذلك لأن

$$2,3\in \mathbb{Z}_6 \; ; \quad 0=2\cdot 3 \; , \quad 2\neq 0 \; , \; 3\neq 0$$

كما أنه للحدودية $f(x)$ أربعة جذور في $\mathbb{Z}_6$ وهي $1,2,4,5$ وهذا ما يبين أنه للحدودية $f(x)$ عدد من الجذور أكبر من درجتها.

2) إذا كانت R منطقة صحيحة منتهية، فإن النتيجة (3) السابقة ليست صحيحة، كما يوضح المثال التالي.

لتكن $f(x)=x^3 , g(x)=x\in \mathbb{Z}_3[x]$ حدوديتين معرفتين على المنطقة التكاملية المنتهية $\mathbb{Z}_3$. إذن

$$f(0)=g(0)=0 , \; f(1)=g(1)=1 ,$$
$$f(2)=g(2)=2 , \quad f(3)=g(3)=0$$

أي أن $f(r)=g(r)$ لكل $r\in \mathbb{Z}_3$، ولكن $f(x)\neq g(x)$ وذلك لأن $3=\deg(f(x))\neq \deg(g(x))=1$.

3) إذا كانت $f(x)=x^3-1\in \mathbb{R}[x]$ حدودية معرفة على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، فإن للحدودية $f(x)$ جذراً واحداً فقط في $\mathbb{R}$ وهو $r=1$ بينما تملك ثلاثة جذور في حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ وهي $1 , \frac{-1+\sqrt{3}\, i}{2} , \frac{-1-\sqrt{3}\, i}{2}$. وبصورة عامة إذا كانت $f(x)\in \mathbb{C}[x]$ حدودية معرفة على حقل الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$ وتحقق $\deg(f(x))\geq 1$، فإن للحدودية n من الجذور في $\mathbb{C}$، ونطلق على هذه الحقيقة النظرية الأساسية في الجبر "Fundamental Theorem of Algebra" والتي برهنت من قبل غاوس بست طرق مختلفة، ويوجد لها الآن العديد من الإثباتات.

1) $d(x)$ تقسم كلاً من $f(x)$ و $g(x)$؛

2) إذا كانت $C(x)\in R[x]$ حدودية تقسم كلاً من $f(x)$ و $g(x)$، فإن $C(x)$ تقسم $d(x)$.

ونرمز له بالرمز $gcd(f(x), g(x)) = d(x)$

أمثلة:

1) إذا كانت $f(x)=x^3+1,\ g(x)=x^2-1 \in \mathbb{Z}[x]$ حدوديتين معرفتين على منطقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، فإن

$g(x)=(x+1)(x-1)$ و $f(x)=(x+1)(x^2+x+1)$، وعليه

$$gcd(f(x), g(x)) = x+1$$

2) إذا كانت $f(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3,\ g(x)=x^3+4x^2+7x+6 \in \mathbb{Q}[x]$

حدوديتين معرفتين على حقل الأعداد العادية (الكسرية)، فإن

$f(1)=f(-1)=0$ إذن $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+3)$

كما أن $g(-2)=0$، إذن $g(x)=(x+2)(x^2+2x+3)$ وعليه يكون

$$gcd(f(x), g(x)) = x^2+2x+3.$$

ملاحظة: لتكن R حقلاً، إذا كانت $f(x), g(x)\in R[x]$ حدوديتين غير صفريتين معرفتين على R، فإنه يوجد قاسم مشترك أعظم وحيد $d(x)\in R[x]$ للحدوديتين $f(x)$ و $g(x)$، كما توجد حدوديتين $s(x), t(x)\in R[x]$ تحققان

$$d(x) = s(x)f(x) + t(x)g(x).$$

أمثلة: أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ للحدوديتين $f(x)$ و $g(x)$ الغير صفريتين ~~المعرفتين على الحقل~~، ثم أوجد $s(x)$ و $t(x)$ بحيث يتحقق $d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$ في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{12},\ g(x)=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\in \mathbb{Q}[x]$ معرفتين على حقل الأعداد العادية $\mathbb{Q}$. نلاحظ أن $deg(f(x)) > deg(g(x))$، وعليه نقسم $f(x)$ على $g(x)$ فنجد أن: $f(x)=(x+1)g(x)+r_1(x)$ حيث $r_1(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\in \mathbb{Q}[x]$ وتحقق $deg(r_1(x)) < deg(g(x))$.

يمكن أن نقسم $g(x)$ على $r_1(x)$ فنجد أن: $g(x)=(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4})r_1(x)$

وعليه $d(x)=\frac{4}{3}(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})=x+\frac{1}{3}$. ولإيجاد $s(x), t(x)\in\mathbb{Q}[x]$ بحيث يتحقق

$d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$ ، نلاحظ أن

$$f(x)=(x+1)g(x)+\frac{3}{4}(x+\frac{1}{3})$$

إذن:

$$\cancel{\tfrac{3}{4}}d(x)=\frac{4}{3}f(x)-\frac{4}{3}(x+1)g(x)$$ وعليه يكون

$$s(x)=\frac{4}{3},\ t(x)=\frac{-4}{3}(x+1)\in\mathbb{Q}[x]$$

($g(x)=2x^3-5x^2+8x+5\in\mathbb{R}[x]$ ، $f(x)=2x^4-3x^3-x^2+12x-10$ حدود تعيين معرفتين على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. نلاحظ أن $\deg(f(x))>\deg(g(x))$ وعليه يمكن أن نقسم $f(x)$ على $g(x)$ فنجد أن

$$\cancel{f(x)=(x+1)g(x)-3(x^2-3x+5)}$$

$$f(x)=(x+1)g(x)+r_1(x)$$ حيث

$r_1(x)=-3(x^2-3x+5)$ و $\deg(r_1(x))<\deg(g(x))$ وعليه يمكن أن نقسم $g(x)$ على (x^2-3x+5) فنجد أن

$g(x)=(2x+1)\cdot(x^2-3x+5)$ ومنه $d(x)=x^2-3x+5$.

ولإيجاد $s(x), t(x)\in\mathbb{R}[x]$ ، نلاحظ أن

$$f(x)=(x+1)g(x)-3d(x)$$

ومنه $$d(x)=-\frac{1}{3}f(x)+(x+1)g(x)$$

إذن $$s(x)=\frac{-1}{3},\ t(x)=x+1\in\mathbb{R}[x]$$

($g(x)=x^3-1\in\mathbb{Q}[x]$ ، $f(x)=x^4-x^3-x^2+1$ حدود تعيين معرفتين على حقل الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$. نقسم $f(x)$ على $g(x)$ فنجد أن

$f(x)=(x-1)g(x)+r_1(x)$ حيث $r_1(x)=-x^2+x\in\mathbb{Q}[x]$. أن $\deg(g(x))>\deg(r_1(x))$ وعليه يمكن أن نقسم $g(x)$ على $r_1(x)$ فنجد أن،

$g(x)=(-x-1)r_1(x)+r(x)$ حيث $r(x)=x-1\in\mathbb{Q}[x]$

و $\deg(r_1(x))>\deg(r(x))$ وبالتالي نقسم أيضاً $r_1(x)$ على $r(x)$ فنجد أن

$r_1(x)=-x\,r(x)$. إذن $d(x)=x-1$. ولإيجاد $s(x), t(x)\in\mathbb{Q}[x]$

$$f(x) - g(x)(x-1) = -x^2 + x$$

لكن

$$d(x) = (x-1) = g(x) - (-x^2+x)(-x-1)$$
$$= g(x) - [f(x) - g(x)(x-1)](-x-1)$$
$$= f(x)(x+1) + g(x)(-x^2+1+1)$$
$$= f(x)(x+1) + g(x)(-x^2+2)$$
$$= f(x)(x+1) + g(x)(2-x^2)$$

إذن $s(x) = x+1$ ، $t(x) = 2-x^2 \in \mathbb{Q}[x]$.

(4) حدوديتان $f(x) = x^5+2x^3+x^2+2x$ ، $g(x) = x^4+x^3+x^2 \in \mathbb{Z}_3[x]$

معرفتين على $\mathbb{Z}_3$. نلاحظ أن $\deg(f(x)) > \deg(g(x))$

وعليه يمكن أن نقسم $f(x)$ على $g(x)$ فنجد أن $f(x) = g(x)(x+2) + r_1(x)$

حيث $r_1(x) = 2(x^3+x^2+x)$ ، يمكن أن نلاحظ أن

$g(x) = x(x^3+x^3+x)$ وعليه يكون $d(x) = x^3+x^2+x \in \mathbb{Z}_3[x]$

وذلك لأن $2^{-1} = 2 \in \mathbb{Z}_3$. ولإيجاد $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ ، نلاحظ

أن $f(x) = g(x)(x+2) + 2d(x)$ ومنه $d(x) = 2f(x) + (x+1)g(x)$

وعليه فإن $s(x) = 2, t(x) = x+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

تعريف: نقول عن حدوديتين $f(x)$ ، $g(x) \in R[x]$ غير صفريتين

ومعرفتين على حقل R ، إنهما أوليتين نسبياً "relatively Prime"

إذا وفقط إذا كان $\gcd(f(x), g(x)) = 1$.

مثال: إذا كانت $f(x) = x^3+1$ ، $g(x) = x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ حدوديتين معرفتين على

حقل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، فإن

$f(x) = x(x^2+1) + (-x+1)$ ، $g(x) = (-x+1)(-x-1) + 2$ ومنه $-x+1 = 2\left(\frac{-x+1}{2}\right)$

وعليه يكون $\gcd(f(x), g(x)) = 1$ أي أن $f(x)$ و $g(x)$ أوليتان نسبياً

... يكون $\gcd(f(x), g(x)) = 1$ ، أي أن $f(x)$ و $g(x)$ أوليتان نسبياً.

لإيجاد $s(x), t(x) \in \mathbb{R}[x]$ بحيث يتحقق: $1 = s(x)f(x) + t(x)g(x)$

نلاحظ أن

$$2d(x) = g(x) + (x+1)(-x+1)$$

$$= g(x) + (x+1)[f(x) - x\,g(x)]$$

$$= +(x+1)f(x) + (1-x-x^2)g(x)$$

إذن

$$s(x) = \frac{1}{2}(1+x), \quad t(x) = \frac{1}{2}(1-x-x^2)$$