16/3/2015

المحاضرة الثالثة

الزمر المراوحة و المدارات :

تعريف: لتكن S هي G-مجموعة ، ولتكن $s \in S$ ، ولنأخذ المجموعة :

$$G_s = \{x \in G : x * s = s\}$$

نثبت أن G_s زمرة جزئية من G .

واضح أولاً أن $G_s \subseteq G$ كما أن $e \in G_s$ لأن $e * s = s$ (لأن G-مجموعة)

إذن $\phi \neq G_s \subseteq G$

كما أنه إذا كان $x, y \in G_s$ عندئذ يكون: $x * s = s$ و $y * s = s$

كما أن $y^{-1} \in G_s$ لأن:

$$y * s = s \Rightarrow y^{-1} * (y * s) = y^{-1} * s \xRightarrow[\text{تأثير}]{*} (y^{-1}.y) * s = y^{-1} * s$$

$$\Rightarrow e * s = y^{-1} * s \Rightarrow s = y^{-1} * s$$

ومنه: لنثبت أن $x.y^{-1} \in G_s$ أي:

$$(x.y^{-1}) * s = x * (y^{-1} * s) = x * s = s \Rightarrow x.y^{-1} \in G_s$$

ومما سبق نجد أن G_s زمرة جزئية من G تسمى

"الزمرة المراوحة في G المعينة بالعنصر s"

مبرهنة: إذا كانت S هي G-مجموعة وكان $s \in S$ وكان $H = G_s$ الزمرة المراوحة في G المعينة بالعنصر s وعندئذ فإن: «$x, y \in G$»

$$x * s = y * s \Leftrightarrow xH = yH$$

الإثبات:

($\Leftarrow$) إذا كان $x.H = y.H$ فإن $x \in y.H$ ينتج من ذلك أن: $h \in H$ و $x = y.h$ وعندئذ يكون:

$$x * s = (y.h) * s = y * (\underbrace{h * s}_{h \in G_s = H}) = y * s$$

وهو المطلوب.

($\Rightarrow$) لنفرض أن $x * s = y * s$ ولنبرهن أن $x.H = y.H$ ولذلك يكفي أن نبرهن أن $x^{-1}.y \in H = G_s$ كما يلي:

$$(x^{-1}.y) * s = x^{-1} * (y * s) = x^{-1} * (x * s) = (x^{-1}.x) * s = e * s = s$$

إذن $x^{-1}.y \in H$ ومنه $x.H = y.H$ وهو المطلوب.

الزمر المرافقة للزمرة H اذا aH و bH مثلاً فإن العناصر مرتبطة بعلاقة

مبرهنة: اذا كانت S هي G-مجموعة وكان $s, s' \in S$ وكان $y \in G$ بحيث $s = y * s'$ فإن $G_{s'} = y^{-1} \cdot G_s \cdot y$
أي أن $G_s, G_{s'}$ زمرتان مترافقتان عندما وفقط عندما $s = y * s'$ ويكون $G_{s'} = y^{-1} G_s y$

الاثبات:

الاحتواء الأول: ليكن $x \in G_{s'}$ عندئذ: $x * s' = s'$
لنثبت أن $x \in y^{-1} G_s y$ عندئذ يكفي أن نثبت أن $y x y^{-1} \in G_s$

$$\Longrightarrow (y \cdot x \cdot y^{-1}) * s = (y \cdot x) * \underbrace{(y^{-1} * s)}_{} = (y \cdot x) * s' = y * (x * s')$$

$y * s' = s \Rightarrow s' = y^{-1} * s$

$$= y * s' = s$$

$$\Longrightarrow y \cdot x \cdot y^{-1} \in G_s \Longrightarrow x \in y^{-1} G_s y \Longrightarrow \boxed{G_{s'} \subseteq y^{-1} G_s y}$$

الاحتواء الثاني: ليكن $z \in y^{-1} G_s y$ عندئذ يوجد $a \in G_s$ بحيث يكون: $z = y^{-1} \cdot a \cdot y$

$$z * s' = (y^{-1} a \cdot y) * s' = (y^{-1} a) * (y * s') = (y^{-1} \cdot a) * s$$
$$= y^{-1} * (a * s) = y^{-1} * s = s'$$

أي أن: $z \in G_{s'}$

$$\Longrightarrow \boxed{y^{-1} G_s y \subseteq G_{s'}}$$

من الاحتوائين يتم المطلوب.

تعريف: لتكن S هي G-مجموعة، وليكن $s \in S$ ولنأخذ المجموعة:
$Gs = \{a * s \,;\, a \in G\}$ غير G_s
فنرى أن $\phi \neq Gs \subseteq S$ لأن: $s \in Gs$ حيث تكتب بالشكل $e * s$
نسمي هذه المجموعة: "مدار العنصر s."

مبرهنة: اذا كانت S هي G-مجموعة وكان $s \in S$ فإن:
$$(G : G_s) = \mathrm{card}\, Gs$$
أي دليل الزمرة المراوحة G المثبتة بـ s يساوي قدرة مدار العنصر s.

الاثبات: ملاحظة أن: $(G : G_s) = \mathrm{Card}\, \frac{G}{G_s}$ مرافقات الزمرة G_s

اذاً يجب أن نبرهن أن قدرتي المجموعتين متساويتين.

يكفي أن نثبت وجود تقابل من الشكل:

$$f : G/G_s \longrightarrow Gs$$

$$f(xG_s) = x*s \ ;$$

إن f تطبيق متباين لأنه:

$$x*s = y*s \Leftrightarrow xG_s = yG_s \Leftrightarrow f(xG_s) = f(yG_s)$$

وأن f غامر:

إذا كان $x*s \in Gs$ ، بالتالي يوجد $x \in G$ أي يوجد $xG_s \in G/G_s$

حيث يكون $f(xG_s) = x*s$

إذن f تقابل وبالتالي $\mathrm{Card}(G/G_s) = \mathrm{Gard}\ Gs$

وبالتالي $(G : G_s) = \mathrm{Card}\ Gs$ وهو المطلوب.

مبرهنة: (لا سنبرهن المحاضرة القادمة!!)

لتكن الأسرة $\Gamma = \{Gs \, ; s \in S\}$ حيث S هي G-مجموعة. و Γ أسرة كل المدارات، أثبت أن Γ تشكل تجزئة لـ S.

Finished Lecture...

G_s زمرة جزئية من G

Gs مدار s مجموعة جزئية

من S