Subject: المحاضرة العاشرة

2015/ 4 / 19

والمعادلات الذاتية لحركة نقطة مادية على منحني.

لنفرض ان النقطة المادية تتحرك على منحني لا يتغير مع مرور الزمن.

نأخذ المحاور الاحداثية $\vec{\tau}$ ، $\vec{n}$ ، $\vec{b}$

شعاع واحدة المماس   شعاع الناظم   شعاع ثنائي الناظم

لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المنحني ولنوجد معادلات الحركة. من قانون التحريك الاساسي:

(I) $$m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{N}$$ رد الفعل

نأخذ لنوجد مساقط هذه المعادلة على المحاور الذاتية:

نعلم ان:

$$v = v\vec{\tau}$$ [شعاع السرعة محمول على المماس]

وبالتالي اذا اوجدنا المشتق نأخذ:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

لدينا:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

حيث ان $d\theta$: تغير زاوية قوس المسار خلال الفترة الزمنية dt.

ds: هو تغير قوس المسار خلال الفترة السابقة dt.

ومنه فإن $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ ρ نصف قطر التقوس.

$$\frac{d\tau}{d\theta} = n \qquad \frac{ds}{dt} = v$$

فيصبح لدينا:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v}{\rho}\vec{n}$$

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

نعوض في I :

$$m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v}{\rho}\vec{n} = \vec{F} + \vec{N}$$

بالاسقاط نجد:

[على المماس] $$m\frac{dv}{dt} = F_\tau$$

[على الناظم الأساسي] $$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n$$

[ثنائي الناظم] $$0 = F_b + N_b$$

معادلات حركة النقطة المادية على المنحني.

نظرية الطاقة الحركية لنقطة مقيدة:

يمكن دراسة حركة النقطة المادية المقيدة كنقطة طليقة فيما إذا اعتبرنا أن هناك قوى أخرى على هذه النقطة، وبالتالي يمكن أن نطبق جميع نظريات التحريك التي طبقت على حركة النقطة الطليقة وبالتالي نطبقها على النقطة المقيدة وبالتالي:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\cdot dr + \lambda_1\,\mathrm{grad}\, f_1 + \lambda_2\,\mathrm{grad}\, f_2$$

لدينا حسب التعريف:

$$\mathrm{grad}\, f\cdot dr = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

ومن معادلة السطح:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

بالمفاضلة نجد أن:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

من هذه العلاقة نجد

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz}_{\mathrm{grad}F\cdot dr\ \text{تعريف}} = -\frac{\partial f}{\partial t}dt \Rightarrow \boxed{\mathrm{grad}F\cdot dr = -\frac{\partial f}{\partial t}dt}$$

Subject: ______ / /

نعوض في العلاقة: ★

$$d\left[\frac{mv^2}{2}\right] = F.dr - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t}\,dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t}\,dt$$

الطاقة الحركية للنقطة المادية المقيدة على منحني ناشئ من تقاطع سطحين (متغير مع مرور الزمن).

ملاحظة:

إذا كان الارتباط لا يتعلق بالزمن بشكل مباشر ومنه لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$$

ويصبح

★★ $$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr$$

هنا عدنا إلى حالة النقطة الطليقة.

من العلاقة ★★

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A$$

حصلنا على عمل J أي دفع القوة المؤثرة على النقطة المادية] وإذا كانت القوة المؤثرة كمونية ومنه:

$$F.dr = dU = -dV$$

$$\frac{mv^2}{2} - U = h$$

أو $$\frac{mv^2}{2} + V = h$$

حركة النقطة المادية بوجود احتكاك

Subject: ____________ / /

عند دراسة حركة مادية على منحني ثابت فإن رد الفعل لن يكون ناظمياً على المنحني، أي أن رد الفعل يصنع مع المستوي الناظمي زاوية تدعى زاوية الاحتكاك وبذلك يكون رد الفعل مركبة مماسية نرمز لها بالرمز R_τ موجودة على المستوي الناظمي ومركبة أخرى R_N يمكن تفريقها إلى مركبتين R_n و R_b ، R_n محمولة على الناظم الأساسي و R_b محمولة على ثنائي الناظم وبالتالي من قانون التحريك الأساسي:

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{R}$$

بالإسقاط نجد:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n \Rightarrow R_n = m\frac{v^2}{\rho} - F_n$$

$$0 = F_b + R_b \Rightarrow R_b = -F_b$$

إن R_τ معاكسة لاتجاه الحركة وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$R_\tau = f\,|R_N|$$ حيث f عامل الاحتكاك

وبما أن: $R_N = R_n + R_b$

$$R_n = \frac{mv^2}{\rho} - F_n$$

$$R_b = -F_b$$

وبالتالي: $|R_N| = \sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

$$= \sqrt{\left[m\frac{v^2}{\rho} - F_n\right]^2 + \left[-F_b\right]^2}$$

نعوض

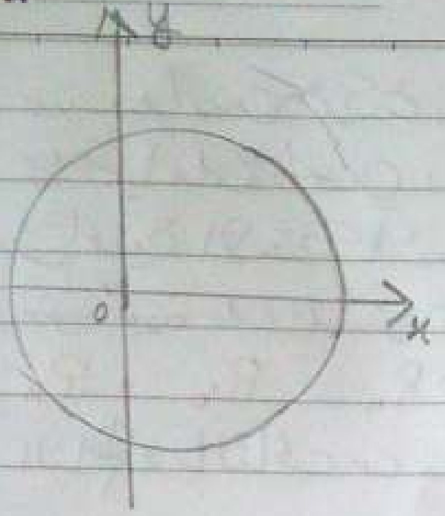
$$\frac{dv}{dt} = F_\tau - f\sqrt{\left[\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right]^2 + F_b^2}$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n + R_n$$

$$0 = F_b + R_b$$

فائدة
إذا الحركة تتم في المستوي فإن المعادلة الثالثة غير موجودة

Subject: / /



حل وظيفة المحاضرة السابقة

[1] إذا أخذنا نظرية الطاقة الحركية

$$d\left[\frac{mv^2}{2}\right] = -mg\,dy$$

وبالتالي بمكاملة الطرفين:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -mg[y - y_0]$$

ومنه فإن: نقسم على الكتلة

$$v^2 - v^2 = -2g[y - y_0]$$

* $v^2 = v_0^2 - 2g[y + a]$ $y = -a$ من شروط البدء

وهذه العلاقة تعطينا السرعة.

* لإيجاد رد الفعل:

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n$$

وبالتالي لدينا $a = \rho$ [لأنها نصف قطر الدائرة]

$$m\frac{v^2}{a} = mg\sin\theta + R_n$$

وبالتالي رد الفعل:

$$R = \frac{mv^2}{a} - mg\sin\theta$$

نقوم بتعويض قيمة v^2 من العلاقة *

$$R = \frac{m}{a}[v^2 - 2gy - 2ga] - \frac{mgy}{a}$$

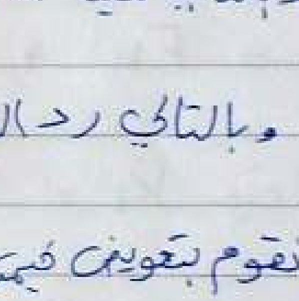
نضرب بـ $\frac{a}{m}$ فيصبح

$$R = v^2 - 2gy - 2ga - gy$$

رد الفعل $\boxed{R = [v^2 - 3gy - 2ga]}$

شرط انفكاك النقطة عن المنحني هو أن يكون رد الفعل = 0

$$v^2 - 3gy - 2ga = 0$$



علينا إيجاد إحداثيات النقطة حسب الشروط:

$$y_1 = \frac{v_0^2 - 2ga}{3g}$$

نقوم بحساب x_1 من معادلة الدائرة $x_1^2 + y_1^2 = a^2$

$$x_1 = \sqrt{a^2 - y_1^2} \Rightarrow a < \frac{v_0^2 - ga}{3g} < a$$

انتهت المحاضرة   بحث مناقشة هذه الحالة يتم المطلوب