د. شوقي الراشد

نظرية الشبكات

9/3/2015

lattices theory

المحاضرة الأولى

تعريف :

1) لتكن L مجموعة غير خالية معرف عليها علاقة ترتيب $\leq$: عندئذ
L تسمى شبكة اذا وفقط اذا تحقق :

$$x , y \in L : \inf\{x,y\} \in L$$
$$\sup\{x,y\} \in L$$

2) نقول عن الشبكة $(L,\leq)$ انها شبكة تامة اذا وفقط اذا تحقق :
اذا كانت $\phi \neq H \subseteq L$ فإن :

$$\inf(H) \in L$$
$$\sup(H) \in L$$

⊙ نقول عن $\phi \neq P \subseteq L$ انها شبكة جزئية في $(L,\leq)$ اذا وفقط اذا تحقق :

$$x , y \in P : \inf\{x,y\} \in L$$
$$\sup\{x,y\} \in L$$

⊙ نقول عن الشبكة الجزئية P من الشبكة $(L,\leq)$ انها محدبة اذا وفقط اذا تحقق :

$$x , y \in P : [x,y] \subseteq P$$

ملاحظة : كل شبكة تامة هي شبكة لكن العكس ليس صحيح بالضرورة .

امثلة :

1* مجموعة الاعداد الصحيحة المعرف عليها علاقة الترتيب المألوفة فان من اجل اي عددين x , y فان $\inf$ هو العدد الاصغر و $\sup$ هو عدد الاكبر - اذاً هي شبكة وليست تامة

2* لتكن لدينا المجموعة $L = \{-1, 2, 6, 5\}$ معرف عليها علاقة ترتيب العادية المألوفة للاعداد

هي شبكة . واضح . (*)

وشبكة تامة . ؟

3* اذا كانت M مجموعة غير خالية نرمز لمجموعة اجزاء M بالرمز $S(M)$ كذلك $\nabla(M)$
اي مجموعة كل المجموعات الجزئية من M

إن $S(M)$ مع علاقة الاحتواء تشكل شبكة وشبكة تامة ايضاً .

وشبكة تامة : الاجتماع هو $\sup$ والتقاطع هو $\inf$: يمكن نثبت انها تامة ناخذ مجموعة من المجموعات الجزئية مثلاً $\{H_i : i \in I\}$ مجموعة جزئية من $S(M)$ لنثبت ان $\sup$ و $\inf$ موجودة :

$\sup$ اجتماع كل المجموعات الجزئية الموجودة في M فهو موجود في $S(M)$

$\inf$ تقاطعهم " " " " " ايضا موجود في $S(M)$

اذا هي شبكة تامة .

4 ✱ لنأخذ المثال $[-2,2]$ مع علاقة الترتيب المعرفة على الاعداد نلاحظ انها تشكل شبكة تامة لأن اي عددين $\inf$ الاصغر والاصغر فيهم و $\sup$ الأكبر والاصغر أي $\inf$ و $\sup$ موجودين فهي شبكة وتامة لأن اذا اخذنا اي مجال جزئي في $[-2,2]$ فنجد ان $\sup$ هذا المجال اصغر او يساوي 2 و $\inf$ اكبر او يساوي -2

و ايضا الشبكة $([-2,2], \leq)$ تشكل شبكة محدودة : لأن لنأخذ اي مجال لاعلى التعيين مجموعة جزئية من $[-2,2]$ ولنثبت انه ينتمي ل $[-2,2]$ اي اذا $a \leq b$ لنبرهن ان $[a,b] \subseteq [-2,2]$

$$-2 \leq \operatorname{Inf}[a,b] \leq \sup[a,b] \leq 2$$

$$-2 \leq \operatorname{Inf}[a,b] \leq a \leq b \leq \sup[a,b] \leq 2$$

$$\Longrightarrow [a,b] \leq [-2,2]$$

5 ✱ كل مجموعة مرتبة كليا غير خالية تشكل شبكة ، بينما اذا كانت شبكة تامة ؟ Z مرتبة كليا ولكنها ليست شبكة تامة

✱ لتكن $\mathbb{N}^* = H$ نعرف على H علاقة الترتيب $\leq$ وفقا لما يلي :

$x \leq y \Leftrightarrow$ y يقبل القسمة على x (اثبت انها علاقة ترتيب ») انعكاسية تخالفية متعدية ،

هل هي شبكة ؟ ، هل هي شبكة تامة ؟ . H.W .

Finished Lecture .....