تعريف: لتكن $(M,\leqslant)$ مجموعة مرتبة غير خالية، حيث $0\in M$ وليكن $\phi \neq I \subseteq M$ نقول أن I مثالي في المجموعة M اذا وفقط اذا تحقق:

1. $x\in I\ ,\ y\in M:\ y\leqslant x \Longrightarrow y\in I$
2. $\phi\neq X\subseteq I$ و $\underset{x\in X}{\bigvee} x\in M$ فإن $\underset{x\in X}{\bigvee} x\in I$

sup

أمثلة:

1. اي مجموعة مرتبة تحوي الصفر تكون مثالي بنفسها
2. لتكن $(M,\leqslant)$ مجموعة مرتبة بحيث $0\in M$ وكان لدينا $a\in M$ عندئذ المجموعة:

$$I=\{x\in M: x\leqslant a\}$$

مثالي في M:

الاثبات: لنثبت أن I مثالي في M:

⊙ I مجموعة غير خالية لأن $a\in I$ حيث $a\leqslant a$ $\Longleftarrow I\neq\phi$

⊙

$y\in M\ ,\ x\in I\ ;\ y\leqslant x$
$x\leqslant a$ «لأن $x\in I$ من الفرض».
$\leqslant$ علاقة متعدية: $y\leqslant a$ $\Rightarrow$ $y\in I$

⊙ لتكن $\phi\neq X\subseteq I$ (X مجموعة غير خالية جزئية من I). وليكن $\underset{x\in X}{\bigvee} x\in M$
وبالتالي:

$$\forall x\in X\subseteq I \Longrightarrow \forall x\in X:\ x\leqslant a$$

"بأخذ الاجتماع للطرفين" $\Longrightarrow \underset{x\in X}{\bigvee} x\leqslant a \longrightarrow$ يساوي a حسب خاصية اللانمو

$$\Longrightarrow \underset{x\in X}{\bigvee} x\in I$$

وبالتالي I مثالي في M، يسمى I مثالي رئيسي مولد بالعنصر a ويرمز له بالرمز

$$I=\langle a\rangle$$

مبرهنة: كل مجموعة مرتبة غير خالية مثل $(M,\leqslant)$ يمكن غمرها في شبكة تامة $(L,\vee,\wedge)$ بواسطة تطبيق غمر هو $\varphi: M\longrightarrow L$ ويتحقق من اجله مايلي:

■ اذا كانت $\phi\neq A\subseteq M$ و $\underset{a\in A}{\bigvee} a\in M$ أو $\underset{a\in A}{\bigwedge} a\in M$ فإن:

$$\left.\begin{aligned}\varphi\Big(\underset{a\in A}{\bigvee} a\Big) &= \bigcup_{a\in A}\varphi(a)\\ \varphi\Big(\underset{a\in A}{\bigwedge} a\Big) &= \bigcap_{a\in A}\varphi(a)\end{aligned}\right\}\ (*)$$

الاثبات: اذا لم يكن الصفر ينتمي لـ M فإننا نقوم بإضافته .

لنعرف المجموعة التالية (مجموعة المثاليات في M):

$$L = \{ X : X \text{ مثالي في } M \}$$

عندئذ تكون $L \neq \phi$ لأن $M \in L$ (M مثالي في نفسه) . وعليه تكون L مجموعة مرتبة وفق علاقة الاحتواء . وبما أن L مجموعة مرتبة اذاً هي شبكة

لنثبت أن L شبكة تامة اي لنثبت انه يحتوي عنصر اعظم . واي مجموعة جزئية منه غير خالية تحوي inf .

- إن M تمثل عنصر اعظم في L اذاً العنصر الاعظم موجود .
- لنأخذ مجموعة جزئية $\phi \neq H \subseteq L$ لنثبت أن $inf\, H \in L$:

L مجموعة مثاليات اذاً لكي ينتمي $inf\, H$ لـ L يجب أن يكون مثالي :

إن عناصر H هي مجموعات وبالتالي حسب تعريف الـ inf هو $X = \bigcap_{h \in H} h$ [h مثالي]

- إن $X \neq \phi$ لأن $0 \in X$ الشرط الاول من شروط المثالي محقق .
- $x \in X \; ; \; y \in M \; ; \; y \leq x \overset{?}{\Longrightarrow} y \in X$ الشرط الثاني من شروط المثالي .

$$x \in X = \bigcap_{h \in H} h \;,\; y \leq x \;,\; y \in M \Longrightarrow x \in h \; ; \; \forall h \in H \;,\; y \in M$$

$$\Longrightarrow y \in h \; ; \; \forall h \in H \Longrightarrow y \in \bigcap_{h \in H} h = X \Longrightarrow y \in X$$ بما أن h مثالي .

- الشرط الثالث من شروط المثالي : لتكن $\phi \neq Y \subseteq X$ حيث $\bigvee_{y \in Y} y \in M$:

$$\forall y \in Y \subseteq X = \bigcap_{h \in H} h \Rightarrow y \in h \; ; \; \forall h \in H$$ ((لأن h مثالي

$$\Rightarrow \bigvee_{y \in Y} y \in M \; : \; \bigvee_{y \in Y} y \in h \; ; \forall h \in H$$

$$\Rightarrow \bigvee_{y \in Y} y \in \bigcap_{h \in H} h = X \Longrightarrow \bigvee_{y \in Y} y \in X$$

وبالتالي

$X = \bigcap_{h \in H} h$ مثالي في M اي أن $X = \bigcap_{h \in H} h \in L$ ولكن $X = inf(H) \in L$

اصبح لدينا L يحتوي عنصر اعظم ومن اجل اي مجموعة جزئية غير خالية $H \subseteq L$ يوجد عنصر مثل $X = inf(H)$ في L ومنه حسب تمرين سابقة (سيتم ذكر التمرين بعد الانتهاء من البرهنة) L شبكة تامة .

- لنثبت أن M تنغمس في L : لذلك سنعرف العلاقة التالية :

$$\varphi : M \longrightarrow L$$

$$\forall m \in M : \varphi(m) = \langle m \rangle = \{ x \in M ; x \leq m \}$$

/ /

إن العلاقة السابقة تطبيق لأن :

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \langle m_1\rangle = \langle m_2\rangle \Rightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2)$$

φ تطبيق متباين :

$$m_1, m_2 \in M \; ; \; \varphi(m_1) = \varphi(m_2) \Rightarrow \langle m_1\rangle = \langle m_2\rangle$$

$$\Rightarrow m_1 \in \langle m_2\rangle \; \& \; m_2 \in \langle m_1\rangle$$

حسب تعريف الشكل الرئيسي $\Rightarrow m_1 \leq m_2 \; \& \; m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$ (≤ تخالفية).

لكي يكون φ معرف جيداً يجب أن نبرهن : (التغمس)

$$m_1, m_2 \in M \qquad m_1 \leq m_2 \Leftrightarrow \varphi(m_1) \leq \varphi(m_2)$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \leq m_2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 \in \langle m_2\rangle \\ \forall x \in \langle m_1\rangle \; ; \; x \leq m_1 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \langle m_1\rangle \; ; \; x \leq m_1 \leq m_2$$

$$\Rightarrow \langle m_1\rangle \subseteq \langle m_2\rangle \Rightarrow \varphi(m_1) \leq \varphi(m_2)$$

$$\Leftarrow \quad \varphi(m_1) \leq \varphi(m_2) \Rightarrow \langle m_1\rangle \subseteq \langle m_2\rangle$$

$$\Rightarrow m_1 \in \langle m_2\rangle \Rightarrow m_1 \leq m_2$$

مما سبق تكون $(M, \leq)$ تغمس في الشبكة التامة L .

بقي اثبات العلاقتين (*) : ليكن $\emptyset \neq A \subseteq M$.

لنفرض أن $\bigwedge_{a\in A} a \in M$ لنثبت أن :

$$\varphi\Big(\bigwedge_{a\in A} a\Big) = \bigwedge_{a\in A} \varphi(a)$$

لنعرف المجموعة :

$$T = \{\langle a\rangle \; ; \; a \in A\}$$

لنثبت أن $\inf T = \bigwedge_{a\in A} \varphi(a)$ هو $\varphi\big(\bigwedge_{a\in A} a\big)$:

لنثبت أولاً أن $\varphi\big(\bigwedge_{a\in A} a\big)$ هو حد أدنى :

$$\forall a \in A : \bigwedge_{a\in A} a \leq a \Rightarrow \varphi\Big(\bigwedge_{a\in A} a\Big) \leq \varphi(a) = \langle a\rangle$$

$\Rightarrow \varphi\big(\bigwedge_{a\in A} a\big)$ حد أدنى للمجموعة T

لنثبت ثانياً أنه أكبر حد أدنى :

ليكن $\langle c\rangle \in L$ حد أدنى للمجموعة T :

$$\forall a \in A \; ; \; \langle c\rangle \leq \langle a\rangle$$

$$\Rightarrow \forall a \in A : c \in \langle a\rangle \Rightarrow \forall a \in A : c \leq a$$

ومنه C حد ادنى لـ A $\quad C \leq \bigwedge_{a\in A} a \rightsquigarrow \inf(A)$

$$\Rightarrow G(c) \leq G(\bigwedge_{a\in A} a) \Rightarrow \langle c\rangle \leq G(\bigwedge_{a\in A} a)$$

وبالتالي $G(\bigwedge_{a\in A} a)$ اكبر حد ادنى للمجموعة T .

ولكن $\inf T = \bigcap_{a\in A}\langle a\rangle = \bigwedge_{a\in A} G(a)$

$$G(\bigwedge_{a\in A} a) = \bigcap_{a\in A} G(a)$$

• بنفس الاسلوب يمكن اثبات ان $G(\bigvee_{a\in A} a) = \bigcup_{a\in A} G(a) = \sup(T)$

تمرين: لتكن $(L, \leq)$ شبكة ما. اثبت ان الشبكة L شبكة تامة اذا وفقط اذا حققت

① L تحوي 0 $(0 \in L)$

② من اجل اي مجموعة غير خالية $A \subseteq L$ فان $\sup A \in L$

أو ① $1 \in L$ ← العنصر الاعظم

② $\inf A \in L$

مبرهنة: لتكن $(L, \leq)$ شبكة عندئذ القضايا التالية متكافئة:

1- L شبكة تامة

2- $0 \in L$ وكل مثالي في L هو مثالي رئيسي.

الاثبات:

$\underline{1 \Rightarrow 2}$ لنفرض ان L شبكة تامة عندئذ $0 \in L$ من جهة ،

ومن جهة اخرى لتكن $\phi \neq I \subseteq L$ مثالي لنثبت ان I مثالي رئيسي ، بما ان L شبكة تامة

فان $\inf I, \sup I \in L$ لنرمز بـ $b = \sup I$ ولنثبت ان $I = \langle b\rangle$ [لان b اكبر عنصر] :

وذلك حسب تعريف المثالي الرئيسي. $\forall x \in I;\ x \leq \sup(I) = b \Rightarrow \boxed{I \subseteq \langle b\rangle}$ ★

$\forall y \in \langle b\rangle \Rightarrow y \in L;\ y \leq b,\ b \in I \xRightarrow{\text{مثالي}} y \in I \Rightarrow \boxed{\langle b\rangle \subseteq I}$ ★

$\underline{2 \Rightarrow 1}$ بما ان L مثالي في نفسه فيكون حسب الفرض L مثالي رئيسي اي $\exists m \in L;\ L = \langle m\rangle$

لتكن $\phi \neq A \subseteq L$ ولنعرف المجموعة $X = \{x \in L;\ x \leq a;\ \forall a \in A\}$

ان $X \neq \phi$ لان $0 \in X$ موجود حسب الفرض. لنثبت ان X مثالي:

$$y \in L, x \in X;\ y \leq x \Rightarrow y \in L, x \in L;\ x \leq a,\ y \leq x,\ \forall a \in A$$

$$\Rightarrow y \in L,\ y \leq a,\ \forall a \in A \Rightarrow y \in X$$

لتكن $\phi \neq B \subseteq X$, $\bigvee_{b\in B} b \in L$

$$\forall b \in B \subseteq X \Rightarrow \forall b \in B;\ b \in L,\ b \leq a,\ \forall a \in A$$

a حد اعلى لـ B $\Rightarrow \bigvee_{b\in B} b \in L$, $\underbrace{\bigvee_{b\in B} b \leq a}_{\text{حسب خاصية اللاحق}} \Rightarrow \bigvee_{b\in B} b \in X$

ومنه X مثالي في L .

وحسب الفرض كل مثالي في L هو مثالي رئيسي . $\exists c \in L : X = \langle c \rangle$

$$\Longrightarrow c \in X ; \forall a \in A : c \leq a$$

ومنه نجد أن c حد أدنى للمجموعة A .

لنثبت أن c أكبر حد أدنى لـ A :

ليكن d حد أدنى للمجموعة A أي :

$$\forall a \in A : d \leq a \Longrightarrow d \in X$$

وبالتالي حسب تعريف المثالي الرئيسي نجد : $d \leq c$

ومنه c أكبر حد أدنى لـ A .

وعليه $\inf A = c \in L$

وبما أن $m \in L = \langle m \rangle$ عنصر أعظم . أي m هو 1_L (لأن $\forall x \in L : x \leq m$)

ومنه 1_L موجود في الشبكة L وهو m ومن أجل أي مجموعة جزئية A غير خالية من L يوجد $c \in L$ بحيث $\inf(A) = c$ وعليه يكون حسب مبرهنة سابقة L شبكة تامة .

Finished Lecture....