المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الغير المتجانسة

تكون من المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى اذا كانت من الدرجة الأولى من المشتقات الجزئية . أي من الشكل

$$Pp + Qq = R \quad \dots (1)$$

حيث $p = \frac{\partial z}{\partial x} \,,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$

$P = P(x,y,z) \longrightarrow$ أمثال p

$Q = Q(x,y,z) \longrightarrow$ أمثال q

$R = R(x,y,z) \longrightarrow$ R " الحد الثابت "

وتسمى معادلة لاجرانج الخطية الغير متجانسة وتسمى الجملة

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

بالجملة المساعدة للمعادلة التفاضلية الجزئية الغير متجانسة (2)

مبرهنة: " دون برهان "

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى الخطية وغير المتجانسة (1)

يعطى بالعلاقة $F(u,v) = 0$ حيث

$$u = u(x,y,z) = c_1 \,,\quad v = v(x,y,z) = c_2$$

وهما تكاملان أوليان مستقلان للجملة المساعدة

Examples: اوجد الحل العام أو السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$xp + yq = z$$

الجملة المساعدة من الشكل:

$$\underset{(1)}{\frac{dx}{x}} = \underset{(2)}{\frac{dy}{y}} = \underset{(3)}{\frac{dz}{z}}$$

$1 = 2$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln|c_1|$$

$$x = y \cdot c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{u = c_1 = \frac{x}{y}}$$

$y \quad z$

$$\ln|y| = \ln|z| + \ln|c_2|$$

$$y = c_2 \cdot z \Rightarrow c_2 = v = \frac{y}{z}$$

ومنه الحل العام , السطوح التكاملية تعطى بالعلاقة

$$F(u, v) = 0$$

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) = 0$$

أوجد الحل العام أو السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = (x^2 - y^2)z$$

الجملة المساعدة تعطى بالعلاقة:

$$\frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

① ② ③

في هذا التمرين لا يمكننا أن نفصل 1=2

لأنه لا يمكن اعتبار y ثابت بالنسبة لـ x

أو z بالنسبة لـ x و y ثابت لذلك

يجب أن نجد التكامل بالنسبة لمتغيرات منفصلة !!

نضرب 1 بـ y و 2 بـ x فنتحصل على

$$\frac{y\,dx}{xy(y^2+z)} = \frac{x\,dy}{-xy(x^2+z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

① ② ③

من خواص التناسب: جمع البسوط والمقامات

هنا النسبة الأولى + الثانية = ~~النسبة~~ الثالثة

أي

$$\boxed{\frac{a}{d} = \frac{b}{n} = \frac{c}{m} \Rightarrow \frac{a+b}{d+n} = \frac{c}{m}}$$

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy^3 + xyz - yx^3 - xyz} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy^3 - yx^3} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

بعد الاختزال

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy(y^2 - x^2)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

مشتق الأول بالنسبة

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = \frac{-dz}{z}$$

الحل الأول أول

$$\ln|x \cdot y| = -\ln|z| \Rightarrow x \cdot y = \frac{c_1}{z} \Rightarrow u = c_1 = x \cdot y \cdot z$$

لإيجاد التكامل الأول الثاني نضرب ① بـ x و ② بـ y

$$\frac{x\,dx}{x^2(y^2+z)} = \frac{y\,dy}{-y^2(x^2+z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2y^2+x^2z-y^2x^2-y^2z} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

نطرح الـ ③ من ① و ② بعد

$$\frac{x\,dx+y\,dy-dz}{x^2y^2+x^2z-y^2x^2-y^2z-x^2z+y^2z} = \lambda \longrightarrow \text{عدد ثابت}$$

"النسبة كلها تساوي عدد ثابت"

$$\frac{x\,dx+y\,dy-dz}{0} = \frac{\lambda}{1}$$

هنا
نضرب الطرفين
بالوسطين صفراً
ولانقول (عدم)

$$x\,dx+y\,dy-dz=0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z = C_2$$

$$x^2+y^2-2z = C_3 \quad , \; 2C_2 = C_3$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_3 = v = x^2+y^2-2z}$$

تكامل أول ثاني

$$F(u,v)=0$$

$$F(xyz,\; x^2+y^2-2z)=0$$

الحل العام أو السطوح التكاملية

السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية المار بمنحني معلوم Γ فإن
إذا كان $u=c_1$ و $v=c_2$. حلاً تاماً للجملة الملحقة فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى والخطية غير المتجانسة هو $F(u,v)=0$ والمطلوب السطح التكاملي المار بمنحني Γ المفروض.

لتكن المعادلات الوسيطية لـ Γ هي $x=x(t),\; y=y(t),\; z=z(t)$

وبما أن السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة الملحقة معنى ما سيكون السطح التكاملي محققاً لـ $u(x(t),y(t),z(t))=c_1$,
$v(x(t),y(t),z(t))=c_2$

وبحذف الوسيط t من المعادلات نحصل على الدالة F التي تربط بـ c_1, c_2 أي

$$F(c_1,c_2)=0$$

أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$(2x-y-z)p+(2y-z-x)q=2z-x-y$$

والذي يحوي المستقيمات $x=0$ و $y=5$

$$\frac{dx}{2x-y-z}=\frac{dy}{2y-z-x}=\frac{dz}{2z-x-y}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{2x-y-z+2y-z-x+2z-x-y}=\lambda$$

$$dx+dy+dz=0$$

$$x+y+z=C_1=u$$

$$1-2 = 2-3$$

$$\frac{dx-dy}{2x-y-z-2y+z+x}=\frac{dy-dz}{2y-z-x-2z+x+y}$$

$$\frac{dx-dy}{3x-3y}=\frac{dy-dz}{3y-3z}$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{1}{3}\,\frac{dy-dz}{y-z}$$

$$\ln|x-y|=\ln|y-z|+\ln|C_2|$$

$$x-y=(y-z)C_2 \implies C_2=\frac{x-y}{y-z}=v$$

تكامل أول ثاني

السطوح التكاملية هي

$$F(u,v)=0$$

$$F\left(x+y+z,\ \frac{x-y}{y-z}\right)=0$$

السطح التكاملي المار ب

$x=0,\ y=5$

$C_1=x+y+z$

$C_2=\dfrac{x-y}{y-z}$

$$C_1=x+y+z \implies z=C_1-x-y$$

$$z=C_1-5$$

$$\implies C_2=\frac{-5}{+5-C_1+5}=\frac{-5}{10-C_1}$$

ومنه السطح التكاملي

$$\frac{x-y}{y-z}=\frac{x-y}{10-x-y-z}$$