نظرية الفئات

المحاضرة العاشرة

١٤/٤/٢٠١٥م

المجموع في الفئات: (الجداء المرافق) (تعميم لمفهوم المجموع المباشر).

تعريف: لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.
ولنفرض أن: $u_i : A_i \longrightarrow A$ مورفيزمات للفئة $\mathcal{C}$ لأجل كل $i\in I$
حيث $A\in ob(\mathcal{C})$
نقول إن الثنائية (A, u_i) مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا حققت الشرط:
- لأجل أية ثنائية $(B, (v_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I})$
من أشياء ومورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$.
يوجد مورفيزم وحيد $v : A \longrightarrow B$
لأجله المخطط المرسوم تبديلي.
أي: $\forall i\in I : v\cdot u_i = v_i$

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll, "v"'] \\ & A_i \arrow[ul, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

* تدعى المورفيزمات $u_i : A_i \longrightarrow A$ بمورفيزمات الاحتواء.

ملاحظة: إن تعريف ومبرهنات المجموع هي نفسها تعريف ومبرهنات الجداء ولكن بأخذ الصورة الثنوية (المرافقة) لها.

تذكرة: * تشاكل الاحتواء في فئة الموديولات:

$$f_1 : M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2$$
$$a \longmapsto (a,0)$$

حيث $(M = M_1\times M_2, (f_i)_{i\in I})$ جداء لأسرة الموديولات $(M_i)_{i\in I}$
حيث $I = \{1,2\}$

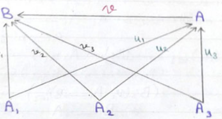
* وأيضاً كمثال آخر: $f_3 : M_3 \longrightarrow M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$

$c \longmapsto (0, 0, c, 0)$

هو تشاكل احتواء حيث: $(M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \;,\; (f_i)_{i\in I})$

هو جداء لأسرة الوحدويات $(M_i)_{i\in I}$ حيث $I = \{1,2,3,4\}$

توضيح للتعريف: عندما $I = \{1,2,3\}$ يمكن أن نرسم المخطط:



فيجب أن يكون v هو الوحيد الذي يحقق:

$v . u_1 = v_1 \quad , \quad v . u_2 = v_2 \quad , \quad v . u_3 = v_3$

ملاحظة: ليس من الضرورة أن يكون المجموع موجوداً بشكل عام في الفئات، لذا:

* نقول عن الفئة إنها فئة مجموع، إذا كانت كل أسرة من أشيائها تملك مجموعاً.
* ونقول عن الفئة إنها فئة مجاميع منتهية إذا كانت كل أسرة منتهية من أشيائها تملك مجموعاً.

أمثلة: إن كلاً من الفئات التالية هي فئة مجموع:

فئة المجموعات - فئة الزمر - فئة الزمر التبديلية - فئة الوحدويات

Sets

برهنة:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$.

الشروط الآتية متكافئة:

① الثنائية $(A, (u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

② التطبيق: $\Gamma : \mathcal{C}(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, X)$

المعرف بالشكل: $\forall \alpha \in \mathcal{C}(A,X) : \Gamma(\alpha) = (\alpha . u_i)_{i\in I}$

متباين وغامر وذلك لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$

الإثبات: $(2) \Leftarrow (1)$:

* إثبات أن Γ تطبيق:

$$\begin{tikzcd} X & & A \arrow[ll, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[ul, "\alpha . u_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

ليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}(A,X)$ بحيث $\alpha_1 = \alpha_2$

يمكن تركيب u_i من اليمين:

$\alpha_1 . u_i = \alpha_2 . u_i \quad \forall i \in I$

$(\alpha_1 . u_i)_{i\in I} = (\alpha_2 . u_i)_{i\in I}$

$\Gamma(\alpha_1) = \Gamma(\alpha_2)$

ومنه Γ تطبيق.

* إثبات أن Γ متباين وغامر (تقابل):

لنعرف العلاقة: $\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, X) \longrightarrow \mathcal{C}(A, X)$

لنأخذ عنصراً من المنطلق: $\forall (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, X)$

$$\begin{tikzcd} X & & A \arrow[ll, "v"'] \\ & A_i \arrow[ul, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

بما أن الأسرة (A, u_i) مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

فإنه حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $v : A \longrightarrow X$

بحيث: $v . u_i = v_i \quad \forall i \in I$

إذا لنعرّف Γ^{-1} كما يلي : $\Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right) = v$

فيكون Γ^{-1} تطبيق وضوحاً (لأن v وحيد حسب التعريف).

لنأخذ تركيب التطبيقين Γ^{-1} , Γ :

- إن : $\Gamma . \Gamma^{-1} : \prod_{i\in I} \mathcal{J}(A_i, X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{J}(A_i, X)$

تطبيق.

أياً كان العنصر من المنطلق : $\forall (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{J}(A_i, X)$

فإن :

$$\Gamma . \Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right) = \Gamma\left(\Gamma^{-1}\left((v_i)_{i\in I}\right)\right)$$

$$= \Gamma(v) = (v . u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Longrightarrow \Gamma . \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I} \mathcal{J}(A_i, X)} \quad ①$$ (صورة كل عنصر نفسه)

- أيضاً : $\Gamma^{-1} . \Gamma : \mathcal{J}(A, X) \longrightarrow \mathcal{J}(A, X)$

تطبيق.

أياً كان العنصر من المنطلق : $\forall v \in \mathcal{J}(A, X)$

فإن :

$$\Gamma^{-1} . \Gamma (v) = \Gamma^{-1}(\Gamma(v)) = \Gamma^{-1}\left((v . u_i)_{i\in I}\right) = v$$

$$\Longrightarrow \Gamma^{-1} . \Gamma = I_{\mathcal{J}(A, X)} \quad ②$$ (صورة كل عنصر نفسه)

من ① و ② نجد أن كل من Γ^{-1} , Γ تقابل، ومنه Γ متباين وغامر.

$/ \quad /$

$\underline{(1) \Longleftarrow (2)}$: لنفرض أن Γ متباين وغامر.

لتكن $(\nu_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{C}$.

من أجل $X = B$ نجد أن: $(\nu_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, B)$

مستقر Γ

ولكون Γ غامر فإنه يوجد $\nu \in \mathcal{C}(A,B)$ بحيث: $\Gamma(\nu) = (\nu_i)_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف Γ يكون: $\Gamma(\nu) = (\nu . u_i)_{i\in I}$

ومنه نجد أن: $(\nu . u_i)_{i\in I} = (\nu_i)_{i\in I}$

$\Longrightarrow \nu . u_i = \nu_i \quad \forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll, "\nu"'] \\ & A_i \arrow[ul, "\nu_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

وبالتالي وجدنا ν تحقق العلاقة (تجعل المخطط تبديلياً).

* إثبات الوحدانية:

لنفرض أن $W : A \longrightarrow B$ مورفيزم آخر للفئة $\mathcal{C}$ تحقق:

$W . u_i = \nu_i \quad \forall i \in I$

$\Longrightarrow (W . u_i)_{i\in I} = (\nu_i)_{i\in I}$

$\Gamma(W) = (\nu_i)_{i\in I} = \Gamma(\nu)$

ولكن Γ متباين، ومنه $W = \nu$.

ومنه فالأسرة (A, u_i) تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

Scanned by CamScanner

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، ولتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$

ولنفرض أن الثنائية $(A,(\tau_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I})$ مجموع الأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ

١- لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم: $p_i : A \longrightarrow A_i$

للفئة $\mathcal{C}$ يحقق: $p_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$

٢- أياً كان $i\in I$ فإن مورفيزم الاحتواء τ_i مونومورفيزم.

الإثبات: ١) بما أن الثنائية (A,τ_i) مجموع الأسرة $(A_i)_{i\in I}$

فإن التطبيق: $\Gamma : \mathcal{C}(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i,X)$

المعرف بالشكل: $\Gamma(\varphi) = (\varphi\cdot\tau_i)_{i\in I}$

متباين وغامر لأجل كل $X\in ob(\mathcal{C})$

من أجل $X = A_i$ فإن: $\Gamma : \mathcal{C}(A,A_i) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{C}(A_i,A_i)$

بما أنه لأجل كل $i\in I$ فإن $I_{A_i} \in \mathcal{C}(A_i,A_i)$

فنجد أن: $(I_{A_i})_{i\in I} \in \underbrace{\prod_{i\in I}\mathcal{C}(A_i,A_i)}_{\text{مستقر } \Gamma}$

وبسبب كون ٣ غامر فإنه يوجد $p_i : A \longrightarrow A_i \in \mathcal{C}(A,A_i)$

بحيث: $\Gamma(p_i) = (I_{A_i})_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف ٣: $\Gamma(p_i) = (p_i\cdot\tau_i)_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd} A_i & A \arrow[l, "p_i"'] \\ & A_i \arrow[u, "\tau_i"'] \arrow[ul, "p_i\cdot\tau_i"] \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow (p_i\cdot\tau_i)_{i\in I} = (I_{A_i})_{i\in I}$

$\Longrightarrow p_i\cdot\tau_i = I_{A_i} \quad \forall i\in I$

وهو المطلوب.

/ /

ج) لدينا : $\tau_i : A_i \longrightarrow A$

لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ لنأخذ التطبيق :

$$\alpha : \mathcal{C}(X, A_i) \longrightarrow \mathcal{C}(X, A)$$

المعرف بالشكل : $\alpha(\lambda) = \tau_i . \lambda$

ولنثبت أن α متباين .

ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}(X, A_i)$ بحيث : $\alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2)$

$$\tau_i . \lambda_1 = \tau_i . \lambda_2$$

وحسب ① يوجد : $\beta_i : A \longrightarrow A_i$

يحقق : $\beta_i . \tau_i = I_{A_i}$

يمكن أن نضرب β_i بطرفي العلاقة من اليسار :

$$\Longrightarrow \beta_i . (\tau_i . \lambda_1) = \beta_i . (\tau_i . \lambda_2)$$

$$(\beta_i . \tau_i) . \lambda_1 = (\beta_i . \tau_i) . \lambda_2$$

$$I_{A_i} . \lambda_1 = I_{A_i} . \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ومنه فالتطبيق α متباين ، والمورفيزم τ_i مونومورفيزم .

مبرهنة :

لتكن $\mathcal{C}$ فئة ، ولنفرض أن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{C}$

لنفرض أن : $(A, (u_i : A_i \longrightarrow A)_{i \in I})$

$(B, (v_i : A_i \longrightarrow B)_{i \in I})$

مجموعين للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ :

يوجد إيزومورفيزم $\alpha : A \longrightarrow B$

لأجله يكون المخطط المرسوم تبديلياً ، أي :

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[ul, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

$$\alpha . u_i = v_i \quad \forall i \in I$$

البرهان:

* بما أن الثنائية (A, u_i) هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

عندئذٍ لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق:

$$\Gamma : \mathcal{C}(A, X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, X)$$

المعرف بالشكل: $\Gamma(w) = (w.u_i)_{i\in I}$

متباين وغامر.

ومنه لأجل $X = B$ فإن: $(v_i : A_i \longrightarrow B)_{i\in I} \in \underbrace{\prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, B)}_{\text{مستقر } \Gamma}$

وبما أن Γ غامر فإنه يوجد $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ بحيث $\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف Γ لدينا: $\Gamma(\alpha) = (\alpha.u_i)_{i\in I}$

ومنه: $(\alpha.u_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

$$\Longrightarrow \alpha.u_i = v_i \quad \forall i \in I$$

ومنه فالمخطط المعطى تبديلي.

(وجدنا مورفيزم $\alpha : A \longrightarrow B$ يحقق أن المخطط تبديلي، ولنثبت أنه إيزومورفيزم)

* أيضاً لدينا (B, v_i) مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

ومنه لأجل كل $X \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق:

$$\bar{\Gamma} : \mathcal{C}(B, X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, X)$$

المعرف بالشكل: $\bar{\Gamma}(\theta) = (\theta.v_i)_{i\in I}$

متباين وغامر.

ومنه لأجل $X = A$ يكون: $(u_i : A_i \longrightarrow A)_{i\in I} \in \underbrace{\prod_{i\in I} \mathcal{C}(A_i, A)}_{\text{مستقر } \bar{\Gamma}}$

وبما أن $\bar{\Gamma}$ غامر فإنه يوجد $\beta \in \mathcal{A}(B,A)$ بحيث: $\bar{\Gamma}(\beta) = (u_i)_{i\in I}$

ولكن حسب تعريف $\bar{\Gamma}$ لدينا: $\bar{\Gamma}(\beta) = (\beta . v_i)_{i\in I}$

ومنه: $(\beta . v_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$

$$\Longrightarrow \beta . v_i = u_i \qquad \forall i \in I$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, shift right, "\beta"'] & & A \arrow[ll, shift right, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[ul, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

* أصبح لدينا:

$$\alpha : A \longrightarrow B$$
$$\beta : B \longrightarrow A$$
$$\alpha . \beta : B \longrightarrow B$$
$$\beta . \alpha : A \longrightarrow A$$

- نلاحظ أن:

$$(\beta.\alpha) . u_i = \beta . (\alpha . u_i) = \beta . v_i = u_i \qquad \forall i \in I$$

ولكن نعلم أن: $I_A . u_i = u_i$

ومنه فإن: $(\beta.\alpha) . u_i = I_A . u_i$

وبما أن u_i مورفيزم احتواء فهو مونومورفيزم (حسب المبرهنة السابقة)

وبالتالي فإن: $\beta . \alpha = I_A$ ★

- كذلك نلاحظ أن:

$$(\alpha.\beta) . v_i = \alpha . (\beta . v_i) = \alpha . u_i = v_i \qquad \forall i \in I$$

ولكن نعلم أن: $I_B . v_i = v_i$

ومنه فإن: $(\alpha.\beta) . v_i = I_B . v_i$

وبما أن v_i مورفيزم احتواء فهو مونومورفيزم (حسب المبرهنة السابقة)

وبالتالي فإن: $\alpha . \beta = I_B$ ★

من ★ و ★ نجد أن كلاً من β , α إيزومورفيزم.

نهاية المحاضرة العاشرة.