المحاضرة الثالثة..

الحصة الأولى 2015/3/22

① μ قياس (متجهي) على جبر تام $\mathcal{A}$ من أجزاء مجموعة معطاة X $\overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu : \mathcal{A} \to \underset{}{\overset{\text{فضاء باناخ}}{(E, \|.\|)}}$

- $\mu(\phi) = 0_E$
- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$

حيث $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\mu A_n\| < +\infty\right)$

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \xrightarrow[N \to +\infty]{} S = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

عندئذٍ يقال عن μ إنه قياس متجهي (يأخذ قيمه في E)

إذا كان الفضاء عقدياً $E = \mathbb{C}$ فإنّ $\|z\| = |z|$ $\Leftarrow$ (μ يقال إنه قياس عقدي)

وإذا كان $E = \mathbb{R}$ فإنّ $\|x\| = |x|$ $\Leftarrow$ (μ يقال إنه قياس حقيقي)

② لنتذكر تعريف القياس الموجب ؛ $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

يحقق الشروط:

- $\mu(\phi) = 0$
- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ يحترم الاجتماع المنفصل
- $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$

متزايد • $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

$\phi \subseteq A \Rightarrow 0 = \mu(\phi) \leq \mu(A)$

• $0 \leq \mu(A) \leq +\infty \quad \forall A \in \mathcal{A}$

عندئذٍ نقول إنَّ μ قياس موجب.

تعاريف:

1- إذا كانت X مجموعة ما غير خالية وكان $\mathcal{A}$ جبراً تاماً في X فإننا نسمي الثنائية $(X, \mathcal{A})$ فضاءً قيوساً ونسمي كل عنصر من $\mathcal{A}$ مجموعة قيوسة.

2- إذا كان μ قياس على $(X, \mathcal{A})$ فإننا نسمي الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءً مقيس أو فضاء القياس μ.

3- إذا كان $\mu(X) < \infty$ قلنا إنَّ μ قياس منتهٍ أو محدود ويسمى μ قياس احتمال إذا كان $\mu(X) = 1$.

4- نقول عن فضاء $(X, \mathcal{A}, \mu)$ مقيس إنَّه σ-منتهٍ إذا تحقق مايلي:
توجد متتالية $\{A_n\}_{n \geq 1}$ من المجموعات القيوسة تحقق مايلي:

$$1- \forall n \in \mathbb{N}^* : \mu(A_n) < \infty$$

$$2- \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

سؤال:

هل القياس الطول على جبر بوريل في $\mathbb{R}$ هو قياس منتهٍ أم σ-منتهٍ، برر ذلك؟

الحل:

إنَّ جبر بوريل هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات $J = J_{co}$

$$B_{\mathbb{R}} \supseteq J = \{[a, b[; a \leq b\}$$

قياسه هو طوله: $\lambda([a, b[) = b - a$

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(]-\infty,+\infty[) = +\infty$$

$\lambda(\mathbb{R}) \not< \infty$ وبالتالي ليس قياس منتهٍ.

توجد متتالية $\{A_n = [-n, n+1[\}_{n\geq 1}$ تحقق ما يلي:

1- $\forall n \in \mathbb{N}^*: \lambda(A_n) = (n+1)-(-n) = 2n+1 < +\infty$

2- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$

وبالتالي هو قياس σ-منتهٍ.

ملاحظة:

- كل مجموعة مفتوحة وغير خالية في $\mathbb{R}$ هي اتحاد معدود ومنفصل لمجالات مفتوحة
- كل مجموعة مفتوحة وغير خالية في $\mathbb{R}$ هي اتحاد معدود ومنفصل لمجالات نصف مفتوحة

وبالتالي كل مجموعة مفتوحة قياسها هو: $\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$

حيث $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n[$

أمثلة على القياس:

(1) لنأخذ $X=\mathbb{R}$ والمزودة بجبر بوريل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (وهو أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المفتوحة)
ثمة قياس وحيد λ على المجموعات البوريلية يدعى قياس لوبيغ-بوريل على $\mathbb{R}$ ويحقق:
$\lambda([a,b[) = (b-a)$ لكل مجالٍ من النمط $[a,b[$

إذا أخذنا مجموعة ما E بوريلية:
فإنه سيكون $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n[$

مثلاً $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n[= \mathbb{R}$

إذاً سيكون قياسها في حال وجوده:

$$\lambda(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$$

نضع تعريفاً:

$$\lambda(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n),\ \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n[\supseteq E\right\}$$

2- قياس ديراك :

لنفرض أن X مجموعة ما و $\mathcal{A}$ جبر تام عليها و a نقطة مثبتة من X ولنعرف التطبيق :

$$\delta_a : \mathcal{A} \to \{0,1\}$$

بالقاعدة التالية:

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad : \quad \delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in E \\ 0 & \text{if } a \notin E \end{cases}$$

إنَّ δ_a قياس على $\mathcal{A}$ يسمى قياس ديراك المتمركز عند النقطة a .

مثلاً : سنأخذ $X = \mathbb{R}$ ، $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ، $a = 10$

$: \forall A \in \mathcal{A}$

$$A \to \mu(A) = \delta_{10}(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } 10 \in A \\ 0 & \text{if } 10 \notin A \end{cases}$$

إنَّ δ_{10} قياس ديراك عند النقطة 10.

3- قياس العدّ :

إذا كانت X مجموعة غير خالية وكان التطبيق :

$$\mu : 2^X \to [0,\infty]$$

$$A \to \mu(A) = |A|$$ $|A| =$ عدد عناصر A

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{if } A \text{ غير منتهية} \\ n & \text{if } A \text{ منتهية} \end{cases}$$

(n عدد عناصرها)

μ هو قياس العد على مجموعة أجزاء X .

انتهت المحاضرة ..