النمذجة الرياضية

15/3/2015 د. ميسم جديد

المحاضرة الأولى :

مقدمة : نصادف في حياتنا اليومية الكثير من الحالات التي تستوقفنا وتتطلب منا دراسة مركزة لإعطاء القرار الأمثل لطبيعة هذه الحالات مثلاً :
انشاء اوتوستراد بين مدينتين - اختيار وسيلة الإعلان - انظمة الحماية الكهربائية - توظيف مفتشين من شركة لضبط جودة الانتاج - عجلة القلب وآلية عملها - التحكم في المخزون - تعيين موقع مستودع - ... الخ .
ان افتقاج لتعاريف الاساليب العلمية فعالة تمكننا من اتخاذ القرار الامثل ، فكان اسلوب النمذجة وإسقاط نظرياته على كافة فروع العلم .

بعض التعاريف للنمذجة :

- النمذجة : هي تعبير عن وصف لمسار اشتغال العلم وكيفية بناءه أو انتاجه .
- النمذجة : مبدأ أو تقنية تمكن الباحث من بناء نموذج لظاهرة أو لسلوك عبر اعطاء المتغيرات أو العوامل المفسرة لكل واحدة من هذه المتغيرات .
- النمذجة : بناء فكري لنموذج رياضي موجه نحو وصف الواقع .
- النمذجة : مجموعة إجراءات تتضمن عليك معقدة مرتبطة ببعضها لإنشاء نموذج ممثل لحالة حقيقية .
- النمذجة : هي اختيارها من له قواعده وآلياته وتكيف مع المجال الذي تدرسه وتقوم بصياغة الموضوع

بعض التعاريف للنموذج :

- النموذج : تمثيل لحالة حقيقية بشيء اسط منك .
- النموذج : هو المثل الذهني لشيء ما ولكيفية اشتغاله .
- النموذج : هو نظرية موجهة نحو الفعل الذي نريد تحقيقه

دور النماذج في بناء العالم :

يتمتع النمذجة في الرياضيات التطبيقية وعند تطبيقها في الكيمياء والفيزياء أو في علوم الحياة والأرض بتحليل ظواهر واقعية وتوقع النتائج من خلال تطبيقه نظرية واحدة أو مجموعة من النظريات بشكل تقريبي :

تصنيف النماذج : النماذج الفيزيائية : نماذج لغوية ، نماذج رسومية ورموزات ...
النماذج الرياضية : هي لغة اسباب تعد الأهم والاكثر استخداماً من بين سائر أنواع النماذج الاخرى . ويكون الهدف من النمذجة هو تكيل سلوك نظام ما لمعرفة ميزاته اذا كان النظام موجود أو من اجل ايجاد أفضل تصميم له .

ALAUIA net

* **النمذجة الرياضية** : هي صياغة مسألة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسم النموذج الرياضي .

* **النموذج الرياضي** : هو عبارة عن مجموعة من العلاقات الرياضية والمنطقية التي تمثل أو هي الحالة قيد الدراسة ، حيث تصف هذه النماذج علاقات هامة بين المتحولات .

يتألف النموذج الرياضي من :

1- تابع موضوعي هدفي الذي يجب زيادته إلى الحد الأعلى أو انقاصه الى الحد الأدنى

2- القيود : تحصر الحلول بالقيم الممكنة ، أي التي تحد قيم المتحولات .

شروط النماذج الرياضية : يجب أن تكون قابلة للحل و تشكل تمثيلاً صالحاً للواقع الأصلي .

الخطوات التي يجب اتباعها لتكوين النماذج الرياضية لأي مسألة مطروحة :

1 دراسة المسألة المطروحة وتحديد عناصرها ومكوناتها :
يجب أن تكون هناك غاية ما يراد الوصول اليها ، مثل تأمين ربح أعظمي أو تأمين كلفة إجمالية أو تأمين توفير أعظمي بالوقت والجهد ، كما يجب تحديد عوامل المسألة التي يجب ايجاد قيمها للوصول للغاية المطلوبة ، يمكن أن تكون هذه العوامل كميات انتاج لمنتجات معينة أو ساعات عمل في مؤسسة اقتصادية أو مبالغ من المال لفعاليات معينة أو كميات منقولة على طرق معينة وغير ذلك .

2 تحديد المدخلات والمخرجات في ضوء الامكانات المتاحة وتحديد القيود المفروضة على المسألة . مثلاً شركة لاستطيع توفير أكثر من كمية معينة من المواد الأولية لأسباب قد تكون خارجة عن ارادتها ، أو في نظام ميكانيكي مثلاً يجب الا تزيد سرعته على حد معين .

3 بيان علاقات التأثير بين العوامل في المسألة : اذا زاد الانتاج في أحد المنتجات فان ذلك سيؤدي الى انقاص الإنتاج من المنتجات .
كما ان هناك شروطاً يجب أن تحقق هذه العوامل بغض النظر عن مردودها من حيث الغاية التي يجب تحقيقها
مثلاً اذا كان أحد العوامل مثلاً كمية منتجة ، يشترط فيه الا يكون سالباً وقد يفرض فيه الا يقل أو يزيد عن كمية معينة .
بعد تحديد كل ما ورد أعلاه فإنه بالامكان صياغة المسألة ضمن علاقات رياضية بمجموعها تطلق عليها اسم " النموذج الرياضي " .

ALMUBIB.net

تجدر الإشارة هنا الى أن المسألة الحقيقية بشكل عام قد لاتكون سهلة الترجمة إلى نماذج رياضية . حتى لو فرضنا انه من الممكن ترجمة اي مسألة نهية الى نموذج رياضي ، فإنه ليس من الضروري أن يكون لكل نموذج رياضي حلول .
لذلك فإنه من الضروري أن نبسط المسألة أو نقربك الى مسألة اخرى قريبة منك ، وفي الوقت نفسه تكون أسهل للترجمة الى نموذج رياضي ، بحيث أن نحافظ اثناء عملية التقريب (التبسيط) لمسألة ما على كل الميزات الأساسية لها
• مثلاً عند دراسة حركة الكواكب ، يمكن عده نقطة في الفضاء وتهمل حجمه وشكله لعد ايجاد النموذج الرياضي وتفسير نتائجه وفقه طبيعة المسألة الحقيقية
فإننا نكون أمام احدى الحالتين :
1- اذا كانت النتائج جيدة ومُرضية : فإننا نكون قد وفقنا بايجاد النموذج الرياضي الذي يمثل المسألة الحقيقية .
2- اذا لم تكن النتائج مُرضية : فإننا نحاول إجراء بعض التعديلات والتغيرات في الفرضيات التي اعتبرناها عند تقريب المسألة، أو أن نبحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي .

انواع النماذج الرياضية :

1- النموذج الخطي : اذا كان متغير دالة الهدف ومجموعة القيود جميعها من الدرجة الاولى فان النموذج الرياضي يدعى نموذج خطي .
2- النموذج اللاخطي : اذا كان تابع الهدف أو احد قيود النموذج من الدرجة الثانية فما فوق أو يحوي احد الدوال اللوغارتمية أو الاسية أو المثلثية .
3- النموذج الديناميكي : هو النموذج الذي يمكن تجزئته الى خطوات ترتبط بمعيار معين حسب طبيعة المسألة موضع الدراسة .

البرمجة الرياضية : ان تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة ما للوصول لهدف معين
ان مسألة البرمجة الرياضية تعني - بشكل عام - البحث عن القيمة المثلى (اصغرى أو عظمى) لتابع جبري يضم عدة متغيرات ، تخضع هذه المتغيرات لمجموعة من القيود تأخذ صيغة مساويات أو متراجحات
ان حل مسألة البرمجة الرياضية يتطلب اذاً ايجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع القيود وتحقق القيمة المثلى لدالة الهدف .
والبرنامج الرياضي هو الانموذج رياضي لمسألة ما .
- انواع البرمجة : خطية - لاخطية - ديناميكية .

البرمجة الخطية: ان البرمجة الخطية هي الأسلوب المساعد على حسن اتخاذ القرار واختيار البرنامج الأفضل للعمليات المستقبلية بعد الأخذ بعين الاعتبار الموارد المتاحة حيث ان كلمة خطية تعني أن العلاقات التي تنطوي عليها المسألة المطروحة للحل بواسطة هذه الطريقة هي علاقات خطية بينما تعني كلمة برمجة الى عملية اعداد البرنامج الكامل أو المخطط للمسألة المطروحة .

تتميز مسائل البرمجة الخطية بوجود عدد كبير من الحلول المقبولة لكن وتتطلب ايجاد حل مثالي من بين مجموعة تلك الحلول المقبولة .

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المسائل الإدارية والاقتصادية والعسكرية .... الخ .

وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم الذي ساعد على تطوير الحاسبات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة .

إن اهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة انشاء النموذج .

من أجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توافر المتطلبات الأساسية التالية :

(أ) تحديد الهدف بصورة كمية :

يعبر عنه بتابع الهدف وهو التابع المطلوب ايجاد القيمة المثلى (أو الصغرى) له.
يجب ان يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ما يمكن من الربح أو تأمين أصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد .

(ب) تحديد القيود :

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة ، كما يجب ان تكون تلك الموارد قابلة للقياس .
وتتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو مساويات .
اذا كان احد المجاهيل يعبر عن كمية منتجة فيشترط أن لا يكون سالباً وقد يفترض فيه ان لا يقل أو يزيد عن كمية معينة ..
بالنسبة للعلاقات الرياضية التي تعبر عن تابع الهدف والقيود يجب أن لا تحوي على عمليات ضرب أو قسمة بين المتغيرات وأن لا يكون أحدها مرفوع الى قوة .

(ج) تحديد البدائل المختلفة :

ويشير هذا الشرط الى ان تكون للمسألة أكثر من حل واحد لأنه اذا كان للمسألة حل واحد لا توجد ضرورة لاستخدام البرمجة الخطية ، بتعبير آخر تتركز فائدة البرمجة الخطية بالمساعدة على اختيار أفضل حل من بين الحلول المختلفة والمتعددة المقبولة .

أنواع النماذج الخطية :

من ناحية تابع الهدف يمكن أن نميز بين نوعين من المسائل :

1- مسألة تعظيم : وهي المسألة التي تأخذ فيها تابع الهدف بالشكل التالي :

$$Z = \sum c_j x_j \longrightarrow Max$$

أي المطلوب ايجاد أكبر قيمة لهذا التابع ضمن الشروط المفروضة

2- مسألة تقليل : وهي مسألة البرمجة الخطية التي تأخذ فيها تابع الهدف بالشكل :

$$L = \sum c_j x_j \longrightarrow Min$$

أي المطلوب ايجاد أصغر قيمة لهذا التابع ضمن الشروط المفروضة .

من ناحية القيود يمكن أن نميز بين شكلين :

1- الشكل العام : لا يشترط على القيود أن تكون من نوع محدد حيث أن النموذج يمكن أن يحتوي على خليط مختلف من القيود ($\leq, =, \geq$) ويكون النموذج الرياضي للمسألة :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow Max \text{ او } Min$$

مجموعة من القيود

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left(\leq, =, \geq\right) b_i$$

قيود السلبية

$$x_{ij} \geq 0$$

حيث $i = 1, 2, \ldots, m$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$

2- الشكل القياسي : وفيه تكون كافة القيود من الشكل النظامي لمسألة البرمجة الخطية وهي على هيئة معادلات . أي انه تشكل على فيه كافة القيود عبارة عن معادلات حيث يكون النموذج الرياضي للمسألة :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow Max \text{ او } Min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

حيث $i = 1, 2, \ldots, m$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$

نستطيع استخدام المصفوفات للتعبير عن الشكل القياسي حيث يصبح النموذج الرياضي :

$$f(x) = cx \longrightarrow Max \text{ او } Min$$

جملة القيود الخطية $Ax = B$

وشروط عدم السلبية $x \geq 0$ حيث :

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C_{(n)} = [C_1, C_2, \ldots, C_n]$$

$$x_{(n,1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{(m,1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ - \\ b_m \end{bmatrix}$$

* تستخدم البرمجة الخطية في مجالات كثيرة نذكر منها :

١- نموذج توزيع الجهد أو تخطيط الإنتاج :

لنفرض أن مصنع يمكنه انتاج الأنواع A_j من المنتجات حيث $j = 1, \ldots, n$

« مثلاً : A_1 = خبز ، A_2 = كعك ، A_3 = حلويات » وذلك باستخدام المواد الأولية B_i حيث $i = 1, \ldots, m$ « مثلاً : B_1 = طحين و B_2 سكر و B_3 سمنة و B_4 خميرة »

حيث تتوفر من هذه المواد الأولية الكمية b_i حيث $i = \overline{1,m}$ « b_1, b_2, b_3, b_4 على الترتيب ».

اذا كانت الوحدة الواحدة من المنتج A_j تستهلك من المادة الاولية B_i الكمية a_{ij}

« مثلاً رغيف الخبز يتطلب من الطحين الكمية a_{11} وقرص الكعك يتطلب من السمنة الكمية a_{32} وهكذا »

واذا كان الربح الصافي للمصنع من انتاج الوحدة الواحدة من المنتج A_j هو c_j عندئذ المطلوب :

* تنظيم الانتاج في هذا المصنع بحيث يكون الربح الصافي اعظمي :

« صيغة اخرى : بناء نموذج رياضي دقيق من خلاله المصنع ربحاً أعظمياً » .

الحل : يجب أولاً أن نوضح ما هي المسألة : نلاحظ أن المجهول هو الكمية المنتجة من كل منتج A_j .

- نفرض أولاً أن الكمية المنتجة من المنتج A_j هي x_j حيث $j = 1, \ldots, n$
- الربح العائد من انتاج المنتج A_1 هو $c_1 x_1$ و الربح العائد من انتاج المنتج A_2 هي $c_2 x_2$ (جداء الربح من الواحدة بالكمية)

وهكذا ..... الربح العائد من انتاج المنتج A_n هو $c_n x_n$

اذاً تابع الربح يعطى بالشكل : « ربح المصنع هو مجموع ارباحه من جميع منتجاته »

التابع الذي سنعتمد

$$\max \leftarrow Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ ـ هدفنا هو الربح

- تحدد الكمية التي يحتاجها المنتج A_1 من المادة الاولية B_1 هي $a_{11} x_1$
- " " " " " A_1 " " " B_2 هي $a_{21} x_1$

وهكذا ....

الكمية التي يحتاجها المنتج A_1 من المادة الاولية B_m هي $a_{m1} x_1$

يمكننا أن ننظم الجدول التالي من اجل جميع المنتجات :

المنتج / المادة الاولية	A_1	A_2	.....	A_n	الكميات المتوفرة :
B_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
B_m	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mn}	b_m
	x_1	x_2		x_n	

الكمية المنتجة x_1 من المنتج A_1

- الوحدة الواحدة من المنتج A_j تتطلب الكمية a_{ij} من المادة الاولية B_i .
- لدينا x_j وحدة من المنتج A_j اذاً تتطلب $x_j a_{ij}$ من المادة B_i
- مجموع الكميات المأخوذة من المادة B_i يجب ألا تزيد عن الكمية b_i المتوفرة من المادة B_i :

اذاً شرط المادة B_i هو $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$

- بما أن المتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي كميات ، فلا يجب ان تكون سالبة ، لذلك نضع شرط عدم السلبية اي من $j = \overline{1,n}$: $x_j \geq 0$ (شرط السامي في المنافع الفيزيائية)

ومنه النموذج الرياضي يكون على الشكل $\max \rightarrow Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

حيث الشروط $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$ شرط المادة

وشرط عدم السلبية :

$x_j \geq 0 \quad : \quad j = \overline{1,n}$

⑦ Finished Lecture...