المحاضرة الرابعة..

2015/3/26..

تذكر أنّ:

جبر بوريل في $\mathbb{R}$: تعريفاً

هو أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المفتوحة، وهذا كلام:

هو أصغر جبر تام يحوي صف المجموعات المغلقة. وهذا كلام:

هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات المفتوحة $]a,b[$. وهذا كلام:

هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات من النمط $]a,b]$ وهذا كلام:

هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات من النمط $[a,b[$ وهذا كلام:

هو أصغر جبر تام يحوي صف المجالات من النمط $[a,b]$.

التطبيقات القيوسة: سنبدأ بالتذكرة بتعريف المتغير العشوائي X (كما ورد في الاحتمالات):

لنأخذ التطبيق X كما يلي:

فضاء احتمالي

$$(\Omega, \mathcal{C}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$$

$$w \in \Omega : w \to X(w)$$

حيث Ω مجموعة ما غير فارغة (مجموعة نتائج تجربة معروضة أو فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة عشوائية)

و $\mathcal{C}$ جبر الأحداث وهو جبر تام من أجزائها.

و P تطبيق الاحتمال $P: \mathcal{C} \to (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ حيث $B_{\mathbb{R}}$ جبر بوريل في $\mathbb{R}$

يقال عن X إنّه متغير عشوائي إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة بوريلية حدث.

أي: $\forall B \in B_{\mathbb{R}} \quad : X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{C}$

أو

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad : X^{-1}([a,\infty[) = [X \geq a] = \{w : X(w) \geq a\} \in \mathcal{C}$$

أو

$$X^{-1}(]a,\infty[) = [X > a] = \{w : X(w) > a\} \in \mathcal{C}$$

أو

$$X^{-1}(]-\infty, a]) = [X \leq a] = \{w : X(w) \leq a\} \in \mathcal{C}$$

أو

$$X^{-1}(]-\infty, a[) = [X < a] = \{w : X(w) < a\} \in \mathcal{C}$$

الصورة العكسية لأي مجال هي حدث.

لنعرف التابع F كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = p[X < x]$$

$$x \longrightarrow F(x)$$

$$F(+\infty) = 1 \quad , \quad F(-\infty) = 0$$

يسمى تابع التوزيع (التراكمي) المتزايد للمتغير العشوائي X .

يقال عن متغير عشوائي إنه منفصل إذا كانت مجموعة قيمه منتهية أو قابلة للعد .

مثال:

في تجربة إلقاء حجري نرد معاً والنظر إلى مجموع الأرقام الظاهرة على الوجهين:

$$X : \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(w) = X(a,b) = a+b$$

$$X(\Omega) = \{2,3,\dots,12\}$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[X=x]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

تذكرة:

توزيع برنولي:

نقول عن متغير عشوائي منفصل X إنّ له توزيعاً برنولياً وسيطه p إذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

حيث $0 < p < 1$

$p + q = 1$

x	0	1
$f(x) = P(X=x)$	q	p

$$E(X) = p \quad , \quad Var(X) = pq$$

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

التوزيع الحداني :

نقول عن المتغير العشوائي X إنّ له التوزيع الحداني بوسيطيه n , p إذا كانت له دالة الكثافة :

$$p[X=x] = \binom{n}{x} q^{n-x} p^{x}$$

$x = 0, 1, \dots, n$ ؛

في حالة $n=3$:

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

في الحالة العامة :

x	0	1	2		K		n
$p[X=x]$	q^n	$nq^{n-1}p$	$\binom{n}{2} q^{n-2} p^2$		$\binom{n}{K} q^{n-K} p^K$		p^n

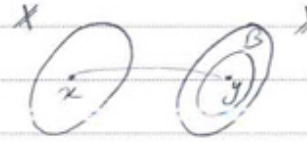
$$p[X=x] = \binom{n}{K} q^{n-K} p^K$$

$$E(X) = np \quad , \quad Var(X) = npq \quad , \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

عودة إلى درسنا "بداية الفصل الثالث من الكتاب"

ليكن التطبيق $f : X \longrightarrow Y$

$$\forall B \subseteq Y : \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$



$$f(X) \subseteq Y$$

و في حالة كان f غامرة تتحقق المساواة $f(X) = Y$

$$A_1, A_2 \subseteq X : \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$f^{-1}(Y) = X$ f غامرة و غير غامرة

$B_1, B_2 \subseteq Y : \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

تعريف :

إذا كان $(X, S), (Y, \tau)$ فضاءين قيوسين و $f : X \to Y$ فإننا نقول عن التطبيق f إنه قيوس ، بالنسبة للحيزين التامين τ, S إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة قيوسة في المستقر مجموعة قيوسة في المنطلق ، أي إذا تحقق : $\forall E \in \tau : f^{-1}(E) \in S$

وإذا لم يكن ثمة التباس فإننا نقول إن f قيوس دون الحاجة إلى ذكر الحيزين التامين .

ملاحظة :

إذا كان التطبيق $f : X \to Y$ وكانت $\tau \subseteq P(Y)$ وكانت :

$\tau_0 = f^{-1}(\tau) = \{ f^{-1}(B) : B \in \tau \} \subseteq P(X)$

فإنه: إذا كانت τ حلقة فإن τ_0 حلقة .

إذا كانت τ حيز فإن τ_0 حيز .

إذا كانت τ بوليوجيا فإن τ_0 بوليوجيا .

تدريب :

أثبت أنه إذا كانت المجاعة τ حيزاً تاماً في Y فإن المجاعة : $S = \{ f^{-1}(E) : E \in \tau \}$ حيز تام في X .

الحل :

الفرض : $f : X \to Y$ تطبيق و τ حيز تام من أجزاء Y و $S = \{ f^{-1}(E) : E \in \tau \}$

الطلب: S حيز تام

فكرة الحل : نذكر أن :

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad , \quad f^{-1}(Y) = X$

$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)$

$f^{-1}(E_1 - E_2) = f^{-1}(E_1) - f^{-1}(E_2)$

ثم تعريف الحيز التام تجد المراد .

ص ٦٦ تدريب:

إذا كان (X,S), (Y,τ) فضائين قيوسين و $\tau = \sigma(\mathcal{E})$ حيث $\mathcal{E} \subseteq 2^Y$

فأثبت أن الشرط اللازم و الكافي كي يكون $f: X \to Y$ قيوساً هو أن يكون:

$$\forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in S$$

الإثبات:

$\Rightarrow$ لنفرض أن f قيوس، أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة قيوسة في المستقر هي مجموعة قيوسة في المنطلق.

وبما أن $\mathcal{E} \subseteq \tau$ فإن $\forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in S$

$\Leftarrow$ لنفرض أن الشرط $\forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in S$ محقق ولنبرهن أن f قيوس

لنأخذ $\tau_1 = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in S\}$

إن τ_1 حيد تام و $\mathcal{E} \subseteq \tau_1$ وبالتالي $\tau = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tau_1$

راجع آخر الكتاب ص ١٩١

انتهت المحاضرة