ملاحظة: بفرض $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ منحني طريقه بدايته $\gamma(a)$ ونهايته $\gamma(b)$

عندئذ نلاحظ أن $I_0 = \int_\gamma 1\,dz = \int_a^b 1\cdot\gamma'(t)\,dt = [\gamma(t)]_a^b$

$= \gamma(b)-\gamma(a)$

$$I_1 = \int_\gamma z\,dz = \int_a^b \gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt = \left[\frac{\gamma^2(t)}{2}\right]_a^b = \frac{\gamma^2(b)-\gamma^2(a)}{2}$$

$$I_n = \int_\gamma z^n\,dz = \int_a^b \gamma^n(t)\,\gamma'(t)\,dt = \left[\frac{\gamma^{n+1}(t)}{n+1}\right]_a^b$$

$$= \frac{\gamma^{n+1}(b)-\gamma^{n+1}(a)}{n+1}$$

— ومنه كل من التكاملات السابقة لا تتعلق بالطريق المسلوك وإنما تتعلق ببداية المنحني ونهايته.

تعريف: بفرض $F(z)$ ، $f(z)$ توابع عقدية مستمرة على المنطقة D عندئذ نقول عن $F(z)$ أنه تابع أصلي لـ $f(z)$ إذا كان $F'(z)=f(z)$ فأي $F(z)+c$ حيث $c\in\mathbb{C}$ مجموعة التوابع الأصلية للتابع $f(z)$.

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع عقدي ومعرف ومستمر على منطقة وحيدة الترابط D.

وبفرض $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ منحني واقع في المنطقة D

وكان لـ $f(z)$ تابع أصلي بالنسبة لـ z وليكن $F(z)$

عندئذ: $I = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z)\,dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

مثال: احسب التكاملات العقدية التالية:

$$J_1 = \int_0^{\pi+i}\cos z\,dz = [\sin z]_0^{\pi+i} = \sin(\pi+i)$$

$$= \frac{e^{i(\pi+i)}-e^{-i(\pi+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i\pi}-e^{1-i\pi}}{2i} = \frac{-e^{-1}+e^{1}}{2i} = \frac{i}{2}(e-e^{-1})$$

$I_2 = \int_\gamma z\,dz \; ; \; \gamma=[0,1+i,2+2i,4i]$

$$I_2 = \int_0^{4i} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4i} = -8$$

#

هام **مبرهنة كوشي:**

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على المنطقة D وحيدة الترابط وبفرض γ منحني بسيط مغلق بحيث يكون واقع في D و $f(z)$ تحليلي داخل γ عندئذ:

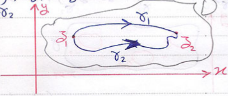
$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على منطقة D وحيدة الترابط وبفرض z_1, z_2 نقطتان من D عندئذ التكامل $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ مستقل عن الطريق الواقع في المنطقة D والواصل بين z_1, z_2

الاثبات:

بفرض γ_1, γ_2 طريقين مختلفين بين z_1 و z_2 واقعين في المنطقة D عندئذ نلاحظ أن المنحني $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ منحني مغلق وواقع في D ومنه حسب مبرهنة كوشي يكون

$$\int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

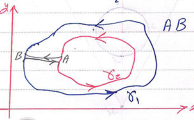


$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

مبرهنة: بفرض γ_1, γ_2 منحنيين بسيطين مغلقين بحيث يقع أحدهما ضمن الآخر وموجهين بنفس الاتجاه وليكن $f(z)$ تابع عقدي تحليلي في المنطقة الواقعة بين المنحنيين γ_1, γ_2 عندئذ:

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz$$



الاثبات:

نحدث شقاً بالمنطقة المفروضة وليكن AB وبالتالي نحصل على المنحني المغلق التالي:

$$\gamma = [AB] + (-\gamma_1) + [BA] + (\gamma_2)$$

منحني يكون التابع $f(z)$ تحليلي بداخله

وحسب مبرهنة كوشي يكون $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

$$\cancel{\int_{[AB]} f(z)\,dz} + \int_{-\gamma} f(z)\,dz + \cancel{\int_{[BA]} f(z)\,dz} + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$-\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

ملاحظة: يمكن تعميم المبرهنة السابقة كما يلي:

نفرض أن $f(z)$ تابع عقدي تحليلي في المنطقة المحصورة بين المنحني γ

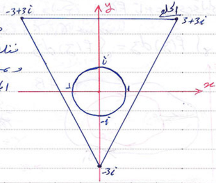
والمنحنيات $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ الواقعة ضمن المنحني γ

حيث $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ لا تتقاطع مع بعضها ومغلقة وبسيطة

عندئذ: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$

تمرين: احسب التكامل $I=\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ حيث γ منحني مثلث

رؤوسه $3+3i, -3+3i, -3i$



نضع $\gamma_1(t)=e^{it};\ t\in[0,2\pi]$

نلاحظ أن γ_1 واقعة داخل γ

وبما أن التابع $\frac{1}{z}$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين γ_1 و γ فإن

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} = 2\pi i$$

وظيفة: احسب التكاملات التالية:

$$I_1 = \int_0^1 z \cos z \, dz$$

$$I_2 = \int_\gamma z \cos dz \quad : \gamma(t) = e^{it} + 3 \quad : t \in [0, 2\pi]$$

$$I_3 = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^4 - 1} dz \quad : \gamma(t) = \frac{1}{2} e^{it} \quad ; t \in [0, 2\pi]$$ تتمة

المحاضرة الرابعة