المحاضرة السابعة — الخميس ٢/٤/٢٠١٥م

معايير الدوال ذات التغير المحدود

① معايير مرتبطة بالدوال المطردة.
② معايير مرتبطة بشروط ليبشتز.
③ معايير أخرى (الاشتقاق - الاستمرار - الدوال الدرجية).

★ المعيار الاول:
إذا كانت f دالة معرفة ومطردة على $[a,b]$ فإنها دالة ذات تغير محدود، ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

نتيجة: إذا كانت f معرفة على $[a,b]$ وكانت f مطردة على المجالات الجزئية التالية
$$[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_n, b]$$
فإن f دالة تغير محدود على $[a,b]$ وأن
$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(c_1) - f(a)| + \ldots + |f(b) - f(c_n)|$$

★ تعريف دالة التغير الكلي $g(x)$ للدالة f (ذات التغير المحدود) وبيان أنها محدودة ومتزايدة وأنها دالة ذات تغير محدود.

★ المعيار الثاني:
إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي f دالة ذات تغير محدود هو أن تكون على شكل فرق دالتين متزايدتين.

★ تعريف شرط ليبشتز (من المرتبة $k \geq 0$):
مبرهنة: إذا كانت f معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k=0$ فإنها محدودة وبالعكس.

★ المعيار الثالث:
إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز (من المرتبة $k=1$) فإن f دالة ذات تغير محدود ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

مبرهنة (٢):
إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من المرتبة $(k<1)$ فإن f دالة ثابتة.

★ المعيار الرابع:
إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث

$$\exists L > 0 : |f'(x)| < L$$

فإن f دالة ذات تغير محدود وأن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

★ المعيار الخامس:
إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن f دالة ذات تغير محدود وأن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \lim_{\Delta P \to 0} V(f,P) \quad ; \quad \Delta P = \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$

★ المعيار السادس والاخير:

إذا كانت $c_1, c_2, \dots, c_n$ نقاط انقطاع من النوع الاول للدالة f المعرفة على $[a,b]$
حيث $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$
وكانت f تأخذ قيماً ثابتة على المجالات

$$]a, c_1[\, , \,]c_1, c_2[\, , \dots , \,]c_n, b[$$

فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ وأن

إذا كانت لم معرفة

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(a+0) - f(a)| + \sum_{i=1}^{n} \left(|f(c_i) - f(c_i - 0)| + |f(c_i + 0) - f(c_i)| + |f(b) - f(b-0)| \right)$$

المعيار الاول:
المثال المعاكس:
ليكن لدينا الدالة المعرفة بالشكل $f(x) = x - x^2$ على $[0,1]$
نلاحظ ان هذه الدالة ذات تغير محدود لانها فرق لدالتين متزايدتين على $[0,1]$
حيث $\varphi(x) = x$ دالة متزايدة و $\varphi'(x) = 1$ على $[0,1]$
$\psi(x) = x^2$ دالة متزايدة و $0 < \psi'(x) = 2x$ على $[0,1]$

ومنه f دالة ذات تغير محدود على $[a,b] = [0,1]$

لندرس تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = 1 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

تعريف دالة التغير الكلي $g(x)$ من الدالة f ذات التغير المحدود على $[a,b]$

$$0 \leq g(x) = \begin{cases} \overset{x}{\underset{0}{V}} f & ; \quad a < x \leq b \\ 0 & ; \quad x = a \end{cases}$$

- $g(x)$ محدودة لأن:

$$0 \leq g(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f \leq \overset{b}{\underset{0}{V}} f < +\infty$$

$$\Rightarrow \exists L > 0, \ \forall x \in [a,b] : |g(x)| < L$$

إذاً $g(x)$ محدودة على $[a,b]$

$g(x)$ متزايدة لأن:

لنبرهن أن: $\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

لكن $x_1, x_2 \in [a,b]$ بحيث $a < x_1 < x_2 < b$ ومنه

$$\overset{x_2}{\underset{a}{V}} f = \overset{x_1}{\underset{a}{V}} f + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f \Rightarrow \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f = \overset{x_2}{\underset{a}{V}} f - \overset{x_1}{\underset{a}{V}} f \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f \leq g(x_2) - g(x_1)$$

$$\Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \geq 0 \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1)$$

وبالتالي g دالة متزايدة

وبما أن g متزايدة فهي مطردة وبالتالي حسب نظرية فإن g دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

/ /

المعيار الثاني:

لزوم الشرط: f دالة ذات تغير محدود $\Leftarrow$ $f = \varphi - \psi$ بحيث φ, ψ متزايدين

البرهان: نأخذ الدالة $g(x)$ دالة التغير الكلي للدالة f

$g(x)$ هي دالة متزايدة على $[a,b]$

نقوم بإنشاء دالة $h(x)$ بحيث $h(x) = g(x) - f(x)$

- إذا أثبتنا أن الدالة h متزايدة فإن f تصبح فرق لدالتين متزايدين

$f(x) = g(x) - h(x)$ ويتم المطلوب ...

- ولإثبات أن h دالة متزايدة على $[a,b]$ يجب إثبات أن

$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \; ; \; x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$

إذاً لندرس المقدار $h(x_1) - h(x_2)$:

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - [g(x_1) - f(x_1)]$$

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - g(x_1) + f(x_1)$$

$$h(x_2) - h(x_1) = [g(x_2) - g(x_1)] - [f(x_2) - f(x_1)]$$

ولكن:

$$f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) = g(x_2) - g(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq g(x_2) - g(x_1)$$

ومنه $\underbrace{g(x_2) - g(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)]}$ ≥ 0

$$h(x_2) - h(x_1) \geq 0 \Rightarrow h(x_2) \geq h(x_1)$$

وبالتالي فإن h دالة متزايدة ومنه فإن f تصبح فرق لدالتين متزايدين.

كفاية الشرط: f دالة مكتوبة على شكل فرق دالتين متزايدين φ, ψ على $[a,b]$

بالشكل التالي $f = \varphi - \psi$ $\Leftarrow$ f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

Magic Book

البرهان:

g دالة متزايدة على $[a,b]$ فهي دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

φ دالة متزايدة على $[a,b]$ فهي دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

اي g, φ دوال ذات تغير محدود على $[a,b]$ وبالتالي فإن فرقهما $\varphi - g$ هو دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ((وذلك حسب مبرهنة سابقة))

تعريف شرط ليبشتز:

إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ نقول عن الدالة f انها تحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k \geq 0$ وكان $L > 0$ بحيث

$$\forall u, v \in [a,b] : \exists L > 0 : |f(u) - f(v)| \leq L |u - v|$$

مبرهنة (1): إذا كانت f معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k=0$ فإنها محدودة وبالعكس.

$(\Leftarrow)$ f دالة تحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k=0$ ، لنبرهن أن f محدودة

نعلم أن $|x| - |y| \leq \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

عندما $k=0$ وباختيار $v=a$ و $\forall u \in [a,b]$ وبتعويض ذلك في شرط ليبشتز نجد ما يلي:

$$v = a \wedge \forall u \in [a,b] : \exists L > 0 : |f(u) - f(v)| \leq L |u - v|^{k=0}$$

$$|f(u) - f(v)| \leq L \Rightarrow |f(a) - f(u)| \leq L$$

but: $|f(u) - f(a)| \geq |f(u)| - f(a)|$

$$\Rightarrow |f(u)| - |f(a)| \leq L \Rightarrow |f(u)| \leq \underbrace{L + f(a)}_{M}$$

ومنه: f محدودة $\Leftrightarrow \exists M > 0 : |f(u)| \leq M , \forall u \in [a,b]$

($\Rightarrow$) f محدودة ، ولنبرهن أن f تحقق شرط ليبشتز.

f محدودة على $[a,b]$ $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \forall u \in [a,b] \,,\, \exists M > 0 : |f(u)| \leq M \\ \forall v \in [a,b] \,,\, \exists M > 0 : |f(v)| \leq M \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq |f(u)| + |f(v)| \leq 2M$$

$$\Rightarrow \forall u, v \in [a,b] \,,\, \exists L = 2M : |f(u) - f(v)| \leq L$$

وذلك عند المرتبة $k=0$

وبالتالي f تحقق شرط ليبشتز.

انتهت المحاضرة...