المحاضرة الخامسة.. "علي"..

الخميس 2015/4/9 ..

أكتب ما تعرفه عن النهاية العليا والنهاية الدنيا لمتتالية .

• النهاية العليا: هي أكبر النهايات الفرعية.

• النهاية الدنيا: هي أصغر النهايات الفرعية.

• العمليات الجبرية والنهايات العليا والدنيا:

لنأخذ المتتالية:

$$(x_n) : 7, -8, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$$

$$\sup_{n\geq 1}(x_n) = 7 \quad , \quad \inf_{n\geq 1}(x_n) = -8$$

$$\overline{\lim}\,(x_n) = +1 \quad , \quad \underline{\lim}\,(x_n) = -1$$

$$\overline{\lim}(x_n) = \lim \sup_{n\geq 1}(x_n) = \lim\left(\sup_{n\geq 1}\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}\right)$$

$$\lim\sup(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

$$\zeta_n = \sup_{k\geq n} x_k$$

$$\zeta_1 = \sup_{k\geq 1} x_k = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = 7$$

$$\zeta_2 = \sup_{k\geq 2} x_k = \sup\{x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} = 1$$

$$\zeta_3 = \sup_{k\geq 3} x_k = \sup\{x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots\} = 1$$

$$\zeta_n = 1 \quad \text{if } n\geq 2 \quad \Rightarrow \zeta_n \to 1$$

$$\underline{\lim}\,(x_n) = \liminf_{n\geq 1} x_n = \lim\,(\inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\,(\inf_{k\geq n} x_k) = \sup_{n\geq 1}\,(\inf_{k\geq n} x_k)$$

$$\xi_n = \inf_{k\geq n} x_k$$

$$\xi_1 = \inf_{k\geq 1} x_k = \inf\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = -8$$

$$\xi_2 = \inf_{k\geq 2} = -1$$

$$\xi_3 = \inf_{k\geq 3} = -1$$

$$\vdots$$

$$\xi_n = \inf_{k\geq n} = -1 \quad \text{if } n\geq 2 \quad \Rightarrow \xi_n \to -1$$

- إذا كانت $a_n \leq b_n$
- فإن: $\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$

$$\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$$

- $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$
- $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

لنأخذ المتتالية:

$$x_n : 2015, -1436, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$$

$$\xi_n = \inf_{k\geq n} x_k$$

$$\xi_1 = \inf_{k\geq 1} x_k = \inf\{x_1, \dots, x_n, \dots\} = -1436$$

$\zeta_2 = \frac{2}{3}$

$\zeta_3 = \frac{3}{4}$

$\vdots$

$\zeta_n = 1 \quad \Rightarrow \zeta_n \to 1 \quad , \liminf x_n = 1$

$\xi_n = \sup_{k \geq n} x_k$

$\xi_1 = \sup_{k \geq 1} x_k = 2015$

$\xi_2 = 1$

$\xi_3 = 1$

$\vdots$

$\xi_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi_n \to 1 \quad \limsup x_n = 1$

$\liminf = \limsup \quad \Rightarrow \lim x_n = 1$

• إذا كان $\sup_{n \geq 1} x_n = \alpha$

$\inf_{n \geq 1} x_n = \beta$

فإنّ: $\sup(-x_n) = -\beta = -\inf x_n$

$\inf(-x_n) = -\alpha = -\sup x_n$

$\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$

$\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$

• إذا كان $x : [a,b] \to \mathbb{R}$

$t \to x(t)$ فإنّ ما تكلمنا به عن المتتاليات يسري على التوابع.

• إنّ:
$$\limsup_{n\geq 1} x_n = \overline{\lim}\, x_n = \inf_{n\geq 1} \left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

$$\liminf_{n\geq 1} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \sup_{n\geq 1} \left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

حيث x_n أعداد أو توابع أو مجموعات.

تمرين:
اذكر نص مبرهنة فاتو وأثبته.

توطئة فاتو (Fatou):
إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القيوسة الموجبة ($f_n \geq 0$) لكل n.
فإنّ تكامل النهاية الدنيا لا يتجاوز النهاية الدنيا للتكاملات.
$$\int_X (\underline{\lim}\, f_n)\, d\mu \leq \underline{\lim} \left(\int_X f_n\, d\mu\right)$$

الإثبات:
لنضع $h_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$

وبالتالي يكون:
$$h_1 = \inf\{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\} \leq f_1$$

$$h_2 = \inf\{f_2, f_3, \dots, f_k, \dots\} \leq f_2$$

$$h_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\} \leq f_n$$

وبالتالي تشكل متتالية متزايدة
$$h_n \nearrow h = \underline{\lim}\, f_n$$

وبالتالي حسب لوبيغ (١):
$$\int h_n \to \int h = \int (\underline{\lim}\, f_n)$$

ولدينا $h_n \leq f_n$

وبالتالي حسب خواص التكامل: $\int h_n \leq \int f_n$

نأخذ النهايات الدنيا:

$$\underline{\lim} \int h_n \leq \underline{\lim} \int f_n$$

إذن $\lim \int h_n \leq \underline{\lim} \int f_n$

$$\lim \int h_n = \int \lim h_n = \int h = \int \underline{\lim}\, f_n$$

وبالتالي:

$$\int \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int f_n$$

انتهت المحاضرة