المحاضرة الخامسة

٢٦ - ٢ - ٢٠١٥

تتمة حل التمرين:

$$C_n = \frac{-C_{n-1}}{(2n+2\lambda)(2n+2\lambda-1)} \quad ; n \geq 1 \quad (\bigstar)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda_2 = 0$$

- الحل الخاص الأول: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ وبالتالي نعوض في $(\bigstar)$ نجد:

$$C_n = \frac{-C_{n-1}}{(2n+1)(2n)}$$

* $n=1 \Rightarrow C_1 = \frac{-C_0}{2\times 3} = -\frac{C_0}{3!}$

* $n=2 \Rightarrow C_2 = \frac{-C_1}{5.4} = \frac{C_0}{5!}$

* $n=3 \Rightarrow C_3 = \frac{-C_2}{7.6} = \frac{-C_0}{7!}$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C_0$$

وبفرض $C_0 = 1$ وبالتالي :

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{\frac{1}{2}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n+1}$$

$$= \sin \sqrt{x}$$

- الحل الخاص الثاني :

$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ليس عدداً صحيحاً

نعوض $\lambda_2 = 0$ في الحل العام لـ $(*)$ فنجد :

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{(2n)(2n-1)}$$

* $n = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{-c_0}{2!}$

* $n = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{4!}$

* $n = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{-c_0}{6!}$

وبالتالي :

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} c_0$$

وبفرض $C_0 = 1$ يكون الحل الخاص الثاني:

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{\frac{2n}{2}}$$

$$= \cos\sqrt{x}$$

وبالتالي يكون الحل العام هو:

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= A\sin\sqrt{x} + B\cos\sqrt{x}$$

—.—.—.—.—.—.—

<u>وظيفة:</u>

1) أوجد الحل العام للمعادلات التالية باستخدام متسلسلات القوى وذلك جوار النقطة $x_0 = 0$:

1) $y'' + y' = x^2 + 1$

2) $y'' + 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$

3) $x^2 y'' + (x+2)y = 0$

—.—.—.—.—.—

معادلة بيسل:

وهي معادلة من الشكل:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

حيث أن ν هو عدد ثابت وتسمى حلول هذه المعادلة التفاضلية بجوار $x=0$

بدوال بسل

* ان $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة نظامية للمعادلة التفاضلية :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض y, y', y'' في المعادلة نجد :

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n x^{n+\lambda-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) x^{n+\lambda-1} + (x^2-\nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - \nu^2\right] c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda+2} = 0$$

بتوحيد القوى نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1+1) - \nu^2\right] c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)^2 - \nu^2\right] c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+\lambda} = 0$$

نقسم على x^{λ} ثم نوحد الحدود الدنيا :

$$(\lambda^2-\nu^2) c_0 + \left[(1+\lambda)^2 - \nu^2\right] c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+\lambda)^2-\nu^2\right] c_n + c_{n-2}\right] x^n = 0$$

بالمطابقة نجد :

$$* \quad \lambda^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \nu^2 \begin{cases} \lambda_1 = \nu \\ \lambda_2 = -\nu \end{cases}$$

$$* \quad ((1+\lambda)^2 - \nu^2)\, c_1 = 0$$

عندما ($\nu \neq \frac{1}{2}$ و $\lambda \neq \frac{1}{2}$) يكون القوس غير معدوم وبالتالي

$$c_1 = 0$$

$$* \quad [(n+\lambda)^2 - \nu]\, c_n + c_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+\lambda-\nu)(n+\lambda+\nu)} \quad \text{---} \circledast$$

من هنا أمام حل المعادلة التفاضلية سنوجد الحل العام والخاص :

$\boxed{1}$ الحل الخاص الأول نعوض $\lambda_1 = \nu$ بـ $\circledast$ نجد :

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{(n+2\nu)(n)} \quad ; \quad n \geq 2$$

نلاحظ أن $c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = 0$ أي أن دلة الفردية معدومة

وبالتالي الأدلة الزوجية تكون :

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{(2n+2\nu)(2n)} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$= -\frac{c_{2n-2}}{4n(n+\nu)} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow C_{2n} = \frac{(-1)^n}{(4)^n\, n!\,(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)}\, C_0$$

* الحل الخاص الأول:

نفرض أن ،
$$C_0 = \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$$

حيث :
$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{x}\, dx$$

$$\Gamma(\nu+n+1) = (n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)\,\Gamma(1+\nu)$$

نعوض ما سبق في C_{2n} فنجد :

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!\,(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(2+\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,2^{\nu}}$$

$$\Rightarrow C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\cdot 2^{\nu}\, n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$$

نعوض في الحل العام $r = \nu$ وهو الحل الخاص الأول

$$y_1 = x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$= x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \cdot \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

وبالتالي

$$y_1 = J_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

ندعو J_ν دالة بسل من النوع الأول ومن المرتبة ν

* الحل الخاص الثاني:

$\lambda_2 = -\nu$ اذا كان ν ليس عدداً صحيحاً وكان ν ليس صفراً يكون الحل الخاص الثاني بتعويض $\lambda = \lambda_2 = -\nu$ ونفرض أن:

$$C_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}$$

$$\Rightarrow \quad C_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!\,(n-\nu)(n-\nu-1)\cdots(2-\nu)(1-\nu)} \cdot \frac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma(1-\nu)}$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot 2^{-\nu}\, n!\; \Gamma(n-\nu+1)}$$

وبالتالي الحل الخاص الثاني هو:

$$y_2 = J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\;\Gamma(n-\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

وهو دالة بسل من النوع الأول ومن المرتبة ν

$\boxed{3}$ في حال كانت $\nu = 0$:

تكون المعادلة من الشكل $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ نأخذ

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\;\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$J_\nu(x) = J_0(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

وهي معادلة بسل من النوع الأول ومن المرتبة صفر

$\boxed{2}$ في حال كانت   عدداً صحيحاً :

يكون الحل من الشكل .

$$y_1 = J_\nu(x)$$

$$y_2 = J_{-\nu}(x) + a J_\nu(x) \ln(x)$$

وهي دالة بسل من النوع الثاني

انتهت المحاضرة